

ÉLECTROMAGNÉTISME

E3A MP 2009

A.1.1.a. Pour créer un champ électrique dans un conducteur, il faut appliquer une différence de potentiel ou tension entre ses extrémités. On peut aussi appliquer un champ magnétique variable ou déplacer le conducteur dans un champ magnétique constant.

b. Dans le référentiel lié au réseau atomique, un électron est soumis :

- à son poids (que l'on néglige devant les autres forces) ;
- à la force $\vec{f}_{\text{ELEC}} = (-e)\vec{E}_0$ de la part du champ électrique ;
- à la force de frottement $\vec{f} = -\frac{m}{\tau}\vec{v}$.

Le référentiel est supposé galiléen. La relation fondamentale de la dynamique s'écrit donc

$$m \frac{d\vec{v}(t)}{dt} = (-e)\vec{E}_0 - \frac{m}{\tau}\vec{v}$$

soit encore
$$\frac{d\vec{v}(t)}{dt} + \frac{\vec{v}}{\tau} = \left(\frac{-e}{m}\right)\vec{E}_0.$$

c. C'est une équation différentielle linéaire du premier ordre dont la solution générale est de la forme $\vec{v}(t) = \vec{A}e^{-t/\tau} - \frac{e\tau}{m}\vec{E}_0$.

Il apparaît la durée caractéristique τ du régime transitoire et la vitesse en régime établi

$$\vec{v}_0 = -\frac{e\tau}{m}\vec{E}_0.$$

d. Le courant électrique est un phénomène de transport convectif donc la densité de courant est de la forme $\vec{J} = n(-e)\vec{v}$. En régime établi, il reste $\vec{J}_0 = n(-e)\vec{v}_0$ soit $\vec{J}_0 = \frac{ne^2\tau}{m}\vec{E}_0$.

L'intensité étant le flux de \vec{J} , l'unité de celui ci est donc homogène à une intensité par unité de surface et son unité est $\text{A}\cdot\text{m}^{-2}$.

e. On constate que l'on a bien la loi locale d'Ohm $\vec{J}_0 = \gamma\vec{E}_0$ en posant $\gamma = \frac{ne^2\tau}{m}$.

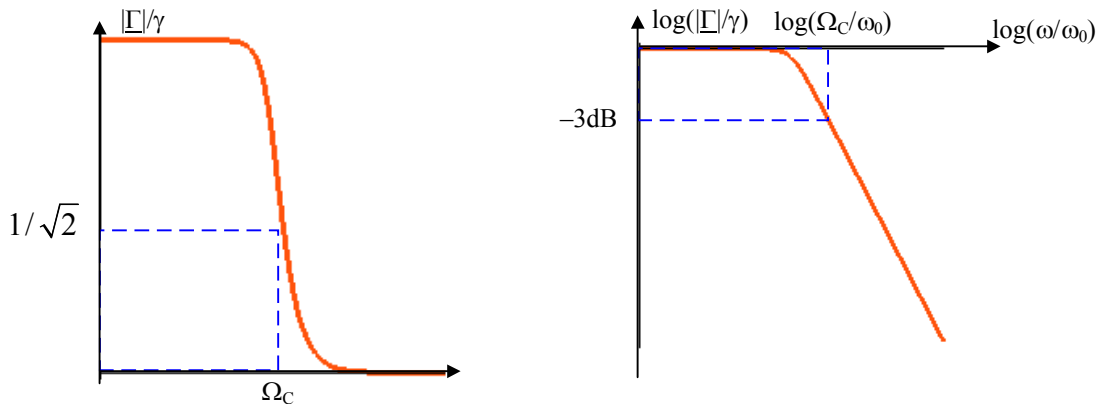
$$\text{A.N. } \gamma = \frac{(18,1 \times 10^{28})(1,6 \times 10^{-19})^2 (7,27 \times 10^{-15})}{(9,1 \times 10^{-31})} = 3,7 \times 10^7 \Omega^{-1} \cdot \text{m}^{-1}.$$

A.1.2.a. L'équation du mouvement est linéaire donc on peut chercher des solutions particulières sinusoïdales de pulsation ω sous forme complexe en notant $\vec{v}(t) = \vec{V}e^{i\omega t}$. On obtient $i\omega\vec{V}e^{i\omega t} + \frac{\vec{V}e^{i\omega t}}{\tau} = \left(\frac{-e}{m}\right)\vec{E}_0e^{i\omega t}$ d'où $\left(i\omega + \frac{1}{\tau}\right)\vec{V} = \left(\frac{-e}{m}\right)\vec{E}_0$ puis $\vec{V} = \left(\frac{-e\tau}{m(1+i\omega\tau)}\right)\vec{E}_0$.

On définit alors la densité de courant complexe $\vec{J} = n(-e)\vec{V} = \left(\frac{ne^2\tau}{m(1+i\omega\tau)}\right)\vec{E}_0$. On recon-

naît la loi locale d'Ohm et l'on peut poser $\underline{\Gamma}(i\omega) = \frac{\gamma}{(1+i\omega\tau)}$.

b. On a $|\underline{\Gamma}(i\omega)| = \frac{\gamma}{\sqrt{1 + \omega^2 \tau^2}}$. C'est une fonction décroissante de ω . On peut tracer la courbe en coordonnées linéaires ou en coordonnées logarithmiques.



On a les formes asymptotiques suivantes donc

- pour $\omega \ll 1/\tau$, $|\underline{\Gamma}(i\omega)| = \gamma$;
- pour $\omega \gg 1/\tau$, $|\underline{\Gamma}(i\omega)| = \frac{\gamma}{\omega\tau}$.

Il apparaît donc la pulsation de coupure $\Omega_C = 1/\tau$. A.N. $\Omega_C = 1,4 \times 10^{14} \text{ rad}\cdot\text{s}^{-1}$. Cette pulsation est très élevée. On peut considérer que pour des fréquences usuelles du courant, la conductivité du métal est un réel indépendant de la fréquence.

A.2.1.a. Les équations de Maxwell s'écrivent, dans le milieu métallique :

$$\boxed{\text{div}(\vec{E}_T) = \rho / \epsilon_0}, \quad \boxed{\text{div}(\vec{B}_T) = 0}, \quad \boxed{\text{rot}(\vec{E}_T) = -\frac{\partial \vec{B}_T(M, t)}{\partial t}}, \quad \boxed{\text{rot}(\vec{B}_T) = \mu_0 \vec{J}(M, t) + \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}_T(M, t)}{\partial t}}.$$

Comme le champ électrique ne dépend que de z et est porté par \vec{e}_x , on a $\boxed{\text{div}(\vec{E}_T) = 0}$. On a donc $\rho = 0$ dans le conducteur (non parfait).

Comme $\boxed{\vec{J}(z, t) = \gamma \vec{E}_T(z, t)}$, on a $|\underline{J}| / \left(\epsilon_0 \frac{\partial \underline{E}}{\partial t} \right) = \gamma / (\epsilon_0 \omega) \gg 1$ par hypothèse donc l'équation de Maxwell-Ampère se réduit à $\boxed{\text{rot}(\vec{B}_T) = \mu_0 \vec{J}(M, t)}$.

b. La condition $\epsilon_0 \frac{\partial \|\vec{E}_T(t)\|}{\partial t} \ll \|\vec{J}(M, t)\|$ s'appelle l'ARQS magnétique.

c. La répartition de courant étant a priori dans tout le volume du conducteur et décrite par \vec{J} dans un modèle 3D, il n'y a pas de densité 2D sur l'interface métal-vide. On a donc continuité de la composante tangentielle de \vec{B} , c'est-à-dire de \vec{B} puisqu'ici, il n'a pas de composante normale. On peut donc écrire $\boxed{B_T(0^+, t) = B_T(0^-, t)}$.

A.2.2.a. Avec les expressions $\vec{E}_T = \underline{E}_T(z, t) \vec{e}_x$ et $\vec{B}_T = \underline{B}_T(z, t) \vec{e}_y$, l'équation de Maxwell-Faraday devient $\frac{\partial \underline{E}_T(z, t)}{\partial z} \vec{e}_y = -\frac{\partial \underline{B}_T(z, t)}{\partial t} \vec{e}_y$ et celle de Maxwell-Ampère devient $-\frac{\partial \underline{B}_T(z, t)}{\partial z} \vec{e}_x = \mu_0 \gamma \underline{E}_T(z, t) \vec{e}_x$.

On dérive la première par rapport à z et la deuxième par rapport à t , on trouve $\frac{\partial^2 \underline{E}_T(z,t)}{\partial z^2} = -\frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial \underline{B}_T(z,t)}{\partial t}$ et $-\frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial \underline{B}_T(z,t)}{\partial z} = \mu_0 \gamma \frac{\partial \underline{E}_T(z,t)}{\partial t}$.

Comme $\frac{\partial^2 \underline{B}_T(z,t)}{\partial z \partial t} = \frac{\partial^2 \underline{B}_T(z,t)}{\partial t \partial z}$, il vient $\frac{\partial^2 \underline{E}_T(z,t)}{\partial z^2} = \mu_0 \gamma \frac{\partial \underline{E}_T(z,t)}{\partial t}$.

Avec $\underline{E}_T(z,t) = \underline{f}(z) \exp(i\omega t)$, il vient $\frac{d^2 \underline{f}(z)}{dz^2} = \mu_0 \gamma i \omega \underline{f}(z)$ après simplification par $e^{i\omega t}$.

b. L'équation caractéristique $r^2 = i\mu_0 \gamma \omega$ a pour racines $r = \pm \frac{1+i}{\sqrt{2}} \sqrt{\mu_0 \gamma \omega} = \pm \frac{1+i}{\delta}$ en posant $\delta = \sqrt{\frac{2}{\mu_0 \gamma \omega}}$. La solution de l'équation différentielle est donc $\underline{f}(z) = \underline{A} e^{\frac{z+i z}{\delta}} + \underline{B} e^{\frac{z-i z}{\delta}}$.

On constate que $\lim_{z \rightarrow \infty} \left| \underline{A} e^{\frac{z+i z}{\delta}} \right| = \infty$ ce qui n'est pas possible physiquement. On en déduit $\underline{A} = 0$.

Il reste donc $\underline{f}(z) = \underline{B} e^{-\frac{z-i z}{\delta}}$ puis $\underline{E}_T(z,t) = \underline{B} e^{-z/\delta} \exp(i(\omega t - z/\delta))$. En posant $\underline{B} = E_{T,0} e^{i\varphi}$, donc la partie réelle est $E_T(z,t) = E_{T,0} e^{-z/\delta} \exp(i(\omega t - z/\delta + \varphi))$.

La grandeur δ est homogène à une longueur car l'argument z/δ est sans dimension. δ représente la distance caractéristique d'atténuation des champs. On l'appelle **épaisseur de peau**.

A.N. $\delta = \sqrt{\frac{2}{(4\pi \times 10^{-7})(3,7 \times 10^7)(2\pi \times 10^6)}} = 8,2 \times 10^{-5} \text{ m}$ soit $\delta = 83 \mu\text{m}$.

c. δ décroît lorsque ω augmente. Pour un conducteur parfait tel que γ est infini, on obtient $\delta = 0$. Il n'y a aucune pénétration des champs.

d. Par définition du vecteur de Poynting, la puissance instantanée qui traverse une surface S est $\mathcal{P}(t) = \iint_S \vec{R} \cdot \vec{n}_S dS$ avec $\vec{R}(M,t) = \frac{\vec{E}(M,t) \wedge \vec{B}(M,t)}{\mu_0}$. Les expressions réelles des champs

conduisent alors à $\vec{R}(M,t) = \frac{E_0^2 \cos^2(\omega t)}{\mu_0 c} \vec{e}_x \wedge \vec{e}_y = \frac{E_0^2 \cos^2(\omega t)}{\mu_0 c} \vec{e}_z$. En prenant une surface per-

pendiculaire à \vec{e}_z , il vient $\mathcal{P}(t) = \iint_S \frac{E_0^2 \cos^2(\omega t)}{\mu_0 c} \vec{e}_z \cdot \vec{e}_z dS = \frac{E_0^2 \cos^2(\omega t)}{\mu_0 c} \iint_S dS$ soit

$$\mathcal{P}(t) = \frac{E_0^2 \cos^2(\omega t)}{\mu_0 c} S.$$

Comme $\langle \cos^2(\omega t) \rangle = 1/2$, la puissance moyenne par unité de surface est $\mathcal{P}_1 = \frac{E_0^2}{2\mu_0 c}$.

Comme $\epsilon_0 \mu_0 = 1/c^2$, on peut écrire aussi $\mathcal{P}_1 = \frac{\epsilon_0 c E_0^2}{2}$.

e. δ est homogène à une longueur et ω à l'inverse d'un temps donc $\omega \delta$ est homogène à une vitesse comme c . Tous les termes des sommes sont homogènes entre eux et le rapport est sans dimension.

On a
$$\mathcal{P}_T = \left(1 - \frac{(\omega\delta - c)^2 + c^2}{(\omega\delta + c)^2 + c^2} \right) \mathcal{P}_I = \left(\frac{(\omega\delta + c)^2 - (\omega\delta - c)^2}{(\omega\delta + c)^2 + c^2} \right) \mathcal{P}_I$$

$$= \left(\frac{((\omega\delta + c) - (\omega\delta - c))((\omega\delta + c) + (\omega\delta - c))}{(\omega\delta + c)^2 + c^2} \right) \mathcal{P}_I = \left(\frac{(2c)(2\omega\delta)}{(\omega\delta + c)^2 + c^2} \right) \mathcal{P}_I$$
soit
$$\mathcal{P}_T = \left(\frac{4\omega\delta c}{(\omega\delta + c)^2 + c^2} \right) \mathcal{P}_I.$$

L'hypothèse $\gamma \gg \epsilon_0 \omega$ se traduit par $\mu_0 \gamma \gg \frac{1}{c^2} \omega$ soit $\frac{2}{\delta^2 \omega} \gg \frac{\omega}{c^2}$ ou encore $\delta \omega \ll c$. La relation précédente devient donc $\mathcal{P}_T \approx \left(\frac{4\omega\delta c}{2c^2} \right) \mathcal{P}_I = \left(\frac{2\omega\delta}{c} \right) \mathcal{P}_I$ soit $\mathcal{P}_T = \epsilon_0 \omega \delta E_0^2$.

Cette puissance est absorbée par le conducteur puis dissipée par effet Joule.

On a $\frac{\mathcal{P}_T}{\mathcal{P}_I} = \left(\frac{2\omega\delta}{c} \right) \ll 1$. La puissance transportée par l'onde incidente ne pénètre pratiquement pas dans le conducteur ce qui justifie a priori le choix de ce type de matériau pour réaliser un blindage électromagnétique.

A.3.1.a. Le champ magnétique à l'intérieur du solénoïde est $\vec{B}_{\text{INT}} = \frac{N}{D} \mu_0 I \vec{e}_z$.

b. Le flux à travers une spire orientée comme \vec{e}_z est $\Phi_{\text{SPIRE}} := \iint \vec{B} \cdot \vec{n}_s dS$. Comme \vec{B} est uniforme sur la surface, il reste $\Phi_{\text{SPIRE}} := \frac{N}{D} \mu_0 I \iint \vec{e}_z \cdot \vec{e}_z dS = \frac{N}{D} \mu_0 I S$ avec $S = \pi r^2$.

Le flux propre total à travers le solénoïde est $\Phi = N \Phi_{\text{SPIRE}}$ soit $\Phi = \frac{N^2}{D} \mu_0 I \pi r^2$.

Par définition du coefficient d'auto inductance, on a $L := \Phi/I$. On trouve donc ici

$$L = N^2 \mu_0 \frac{\pi r^2}{D}.$$

c. Le champ créé par la grande bobine dans la petite est toujours $\vec{B}_{\text{INT}} = \frac{N}{D} \mu_0 I \vec{e}_z$ donc son flux à travers une spire de la petite bobine orientée comme \vec{e}_z est $\Phi'_{\text{SPIRE}} = \frac{N}{D} \mu_0 I \pi r'^2$. Le flux total est donc $\Phi' = \frac{N N'}{D} \mu_0 I \pi r'^2$

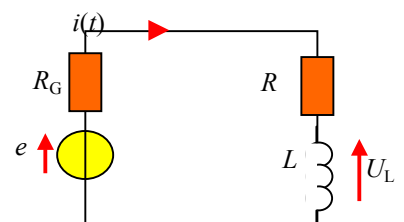
Par définition du coefficient d'inductance mutuelle, on a $M := \Phi'/I$. On trouve donc ici

$$M = N N' \mu_0 \frac{\pi r'^2}{D}.$$

On en déduit $\alpha = N N'$.

d. Dans l'ARQS magnétique, le champ magnétique vérifie les équations $\text{div}(\vec{B}_T) = 0$ et $\text{rot}(\vec{B}_T) = \mu_0 \vec{J}(M, t)$ comme en magnétostatique donc l'expression du champ magnétique créé par la bobine est la même. Les résultats précédents ne sont donc pas modifiés.

A.3.2.a. On dessine le circuit avec l'intensité orientée. On est en régime sinusoïdal donc on utilise les impédances complexes. On peut écrire $\underline{E} = (R + R_G) \underline{I} + iL\omega \underline{I}$ d'où $\underline{I} = \frac{\underline{E}}{(R + R_G) + iL\omega}$.



On en déduit $|\underline{I}| = \frac{|\underline{E}|}{\sqrt{(R+R_G)^2 + (L\omega)^2}}$ et $\tan(\varphi_I - \varphi_e) = -L\omega/(R+R_G)$.

On obtient $i(t) = \frac{E_m \cos(\omega t)}{\sqrt{(R+R_G)^2 + L\omega^2}}$ en posant

$$\varphi_e = \arctan(L\omega/(R+R_G)).$$

b. On a $u_L(t) = L \frac{di(t)}{dt}$ soit, en amplitude complexe $\underline{U}_L = iL\omega \underline{I} = \frac{iL\omega \underline{E}}{(R+R_G) + iL\omega}$ donc

$$\frac{\underline{U}_L}{\underline{E}} = \frac{i\omega L/(R+R_G)}{1 + i\omega L/(R+R_G)} \text{ qui est bien de la forme demandée en posant } \omega_c = \frac{R+R_G}{L}.$$

On a $\left| \frac{\underline{U}_L}{\underline{E}} \right| = \frac{\omega/\omega_c}{\sqrt{1+(\omega/\omega_c)^2}}$ donc $\left| \frac{\underline{U}_L}{\underline{E}} \right|_{\omega=0} \sim 0$ et $\left| \frac{\underline{U}_L}{\underline{E}} \right|_{\omega=\infty} \sim 1$. On a un **filtre passe-haut**.

B.1. On constate que le champ électrique et le champ magnétique n'ont pas le même comportement vis-à-vis de la fréquence à basse fréquence mais décroissent de la même manière au-dessus d'une fréquence critique de l'ordre de 10^6 Hz.

- Le champ électrique ne pénètre pas dans la cavité à basse et à haute fréquence. Il est maximum dans la cavité au voisinage de la fréquence critique. Pour des fréquences inférieures, l'augmentation du champ est de l'ordre de +50 dB par décade. Pour des fréquences supérieures, la décroissance du champ est de l'ordre de -75 dB par décade.

- Le champ magnétique pénètre dans la cavité à basse fréquence mais pas à haute fréquence. Il décroît constamment dans la cavité si la fréquence augmente, avec deux pentes bien distinctes : pour des fréquences inférieures à la fréquence critique, la décroissance est de l'ordre de -10 dB par décade ; pour des fréquences supérieures, la décroissance est de l'ordre de -75 dB par décade.

B.2. L'équation de Maxwell-Faraday s'écrit $\overrightarrow{\text{rot}}(\overrightarrow{E}_{\text{INT}}) = -\frac{\partial \overrightarrow{B}_{\text{INT}}(M,t)}{\partial t}$. Sur la surface

d'aire S_L orienté comme \vec{e}_y , on peut écrire $\iint_{S_L} \overrightarrow{\text{rot}}(\overrightarrow{E}_{\text{INT}}) \cdot \vec{n}_\Sigma(M) dS = -\iint_{S_L} \frac{\partial \overrightarrow{B}_{\text{INT}}}{\partial t} \cdot \vec{n}_\Sigma(M) dS$.

- Avec le théorème de Stokes, il vient $\iint_{S_L} \overrightarrow{\text{rot}}(\overrightarrow{E}_{\text{INT}}) \cdot \vec{n}_\Sigma(M) dS = \oint_C \overrightarrow{E}_{\text{INT}} \cdot \vec{\tau} d\ell$. Le champ

$\overrightarrow{E}_{\text{INT}}$ est tangent au contour en tous les points de celui-ci et sa valeur algébrique uniforme donc $\oint_C \overrightarrow{E}_{\text{INT}} \cdot \vec{\tau} d\ell = E_{\text{INT}}(t) L$ avec l'orientation choisie.

- $\iint_{S_L} \frac{\partial \overrightarrow{B}_{\text{INT}}}{\partial t} \cdot \vec{n}_\Sigma(M) dS = \frac{d}{dt} \iint_{S_L} \overrightarrow{B}_{\text{INT}} \cdot \vec{n}_\Sigma(M) dS$ car les opérateurs $\frac{\partial}{\partial t}$ et \iint_{S_L} commutent

puisque'ils portent sur des variables indépendantes. Mais $\iint_{S_L} \overrightarrow{B}_{\text{INT}} \cdot \vec{n}_\Sigma(M) dS = B_{\text{INT}}(t) \vec{e}_y \cdot \iint_{S_L} \vec{e}_y dS$ car

le champ magnétique est supposé uniforme à l'intérieur. Il reste $\iint_{S_L} \overrightarrow{B}_{\text{INT}} \cdot \vec{n}_\Sigma(M) dS = B_{\text{INT}}(t) S_L$.

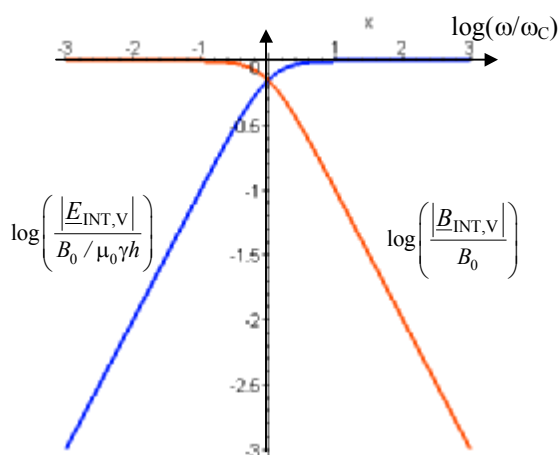
En reportant, on obtient $E_{\text{INT}}(t) L = -\frac{dB_{\text{INT}}(t)}{dt} S_L$.

Cette équation est linéaire donc on peut utiliser les représentation complexe. On en déduit $\underline{E}_{\text{INT}} L = -i\omega \underline{B}_{\text{INT}} S_L$ ou encore $\underline{E}_{\text{INT}} L + i\omega \underline{B}_{\text{INT}} S_L = 0$

B.3. On a $|\underline{E}_{\text{INT,V}}| = \frac{\omega S_L B_0}{\sqrt{L^2 + (\gamma \omega \mu_0 h S_L)^2}}$ et $|\underline{B}_{\text{INT}}| = \frac{L B_0}{\sqrt{L^2 + (\gamma \omega \mu_0 h S_L)^2}}$. On constate $|\underline{E}_{\text{INT,V}}|_{\omega=0} \sim 0$ et $|\underline{B}_{\text{INT,V}}|_{\omega=0} \sim B_0$ d'une part et $|\underline{E}_{\text{INT,V}}|_{\omega=\infty} \sim 0$ et $|\underline{B}_{\text{INT,V}}|_{\omega=\infty} \sim 0$. Ces limites sont conformes aux résultats expérimentaux.

B.4. Posons $\omega_C = \frac{L}{\mu_0 \gamma h S_L}$, on peut alors écrire $\underline{E}_{\text{INT,V}} = \frac{B_0}{\mu_0 \gamma h} \frac{i \omega / \omega_C}{i \omega / \omega_C - 1}$ et $\underline{B}_{\text{INT}} = B_0 \frac{1}{1 - i \omega / \omega_C}$

On en déduit :



- $\log\left(\frac{|\underline{E}_{\text{INT,V}}|}{B_0 / \mu_0 \gamma h}\right)_{\omega=0} \sim \log\left(\frac{B_0}{\mu_0 \gamma h}\right) - \log(\omega / \omega_C)$ et

- $\log\left(\frac{|\underline{E}_{\text{INT,V}}|}{B_0 / \mu_0 \gamma h}\right)_{\omega=\infty} \sim \log\left(\frac{B_0}{\mu_0 \gamma h}\right)$.

- $\log\left(\frac{|\underline{B}_{\text{INT,V}}|}{B_0}\right)_{\omega=0} \sim \log(B_0)$ et

- $\log\left(\frac{|\underline{B}_{\text{INT,V}}|}{B_0}\right)_{\omega=\infty} \sim \log(B_0) - \log(\omega / \omega_C)$.

L'allure des courbes est indiquée ci-contre.

A.N. $\omega_C = \frac{4 \times (30 \times 10^{-2})}{(4\pi \times 10^{-7})(3,7 \times 10^7)(0,2 \times 10^{-3})(30 \times 10^{-2})^2}$

$= 1434 \text{ rad.s}^{-1}$ soit $f_C = \frac{\omega_C}{2\pi} = 228 \text{ Hz}$.

B.5. On constate que ce modèle ne prévoit pas correctement l'allure des courbes (il manque la décroissance de $|\underline{E}_{\text{INT}}|$ à haute fréquence ni la valeur de la fréquence de coupure.

C.1.1. a. La courbe de $U_{1,\text{EFF}}$ seule montre que cette tension est faible aux basses fréquences même en l'absence de blindage. Le champ induit est faible aux basses fréquences. Il vaut donc mieux tracer le rapport des tensions avec et sans blindage pour ne voir que l'effet de celui-ci. La courbe de $U_{\text{EFF,B}}/U_{\text{EFF,A}}$ montre que le blindage agit comme un filtre passe-bas ayant une fréquence de coupure de l'ordre de 10 kHz..

b. $\delta = \sqrt{\frac{2}{(4\pi \times 10^{-7})(3,7 \times 10^7)(2\pi \times 10^4)}} = 8,3 \times 10^{-4} \text{ m}$ soit 0,83 mm. On a donc $\delta \gg h$.

L'onde électromagnétique pénètre donc correctement à cette fréquence. Ce n'est pas l'effet de peau qui provoque l'effet de blindage.

C.1.2.a. Puisque la tension induite aux bornes de la bobine 1 est due uniquement à la variation du flux magnétique envoyé par (2) à travers (1), on peut écrire $u_1(t) = M \frac{di_2(t)}{dt}$ où $i_2(t)$ est le courant circulant dans la bobine 2. En régime sinusoïdal on a donc $\underline{U}_1 = iM\omega \underline{I}_2$. En utilisant la question A.3.2.a., on obtient $\underline{U}_1 = \frac{iM\omega}{(R_2 + R_G) + iL_2\omega} \underline{E}_G$ soit $\frac{|\underline{U}_{1,A}|}{E_G} = \frac{M\omega}{\sqrt{(R_2 + R_G)^2 + (L_2\omega)^2}}$. Avec les expressions de M et de L trouvées aux questions A.3.1.b et A.3.1.c, on obtient

$$\frac{|\underline{U}_{1,A}|}{E_G} = \frac{N_1 N_2 \mu_0 \frac{\pi r_1^2}{D} \omega}{\sqrt{(R_2 + R_G)^2 + \left(N_2^2 \mu_0 \frac{\pi r_2^2}{D}\right)^2}} = \frac{N_1 r_1^2}{N_2 r_2^2} \frac{\mu_0 \frac{\pi}{D} \frac{N_2^2 r_2^2}{(R_2 + R_G)} \omega}{\sqrt{1 + \left(\mu_0 \frac{\pi}{D} \frac{N_2^2 r_2^2}{(R_2 + R_G)} \omega\right)^2}}$$

En notant $\omega_c = \frac{D}{\mu_0 \pi} \frac{(R_2 + R_G)}{N_2^2 r_2^2}$, on obtient $\boxed{\frac{|U_{1,A}|}{|E_G|} = \frac{N_1 r_1^2}{N_2 r_2^2} \frac{(\omega/\omega_c)}{\sqrt{1+(\omega/\omega_c)^2}}}$.

On constate que $|U_{1,A}|$ correspond bien à un filtre passe_haut comme la courbe expérimentale.

Avec $L_2 = N_2^2 \mu_0 \frac{\pi r_2^2}{D}$, on peut écrire $\boxed{\omega_c = (R_2 + R_G)/L_2}$.

A.N. $\omega_c = \frac{(12+50)}{100 \times 10^{-3}} = 620 \text{ rad}\cdot\text{s}^{-1}$ soit $f_c = 99 \text{ Hz}$. Cette valeur est cohérente avec la valeur expérimentale de f_1 .

C.2.a. La cause du champ électrique est ici le champ magnétique variable dans le temps. Il est uniforme dans la bobine et porté par \vec{e}_z . Il est donc invariant par **antisymétrie** par rapport au plan contenant O, M et \vec{e}_z . Il en est de même de $\vec{E}(M, t)$ qui est donc porté par $\vec{e}_\theta(M)$. On peut écrire $\vec{E}(M, t) = E(r, z, t) \vec{e}_\theta(M)$.

Le champ magnétique est invariant par translation le long de \vec{e}_z donc E ne dépend pas de z .

Le champ magnétique est invariant par rotation d'un angle θ quelconque autour de \vec{e}_z donc E ne dépend pas de θ .

Remarque : il n'y a pas invariance du champ magnétique le long de \vec{e}_r car il n'a pas la même valeur lorsque l'on sort de la bobine.

On obtient donc $\vec{E}(M, t) = E_\theta(r) \vec{e}_\theta(M)$ et, d'après la loi locale d'Ohm, $\vec{J}(M, t) = \gamma E_\theta(r) \vec{e}_\theta(M)$.

b. On intègre l'équation de Maxwell-Faraday sur la surface qui s'appuie sur un contour circulaire de rayon r , orienté comme me \vec{e}_θ , $\iint_S \text{rot}(\vec{E}_{\text{INT}}) \cdot \vec{n}_\Sigma(M) dS = -\iint_{S_L} \frac{\partial \vec{B}_{\text{INT}}}{\partial t} \cdot \vec{n}_\Sigma(M) dS$.

$$\bullet \iint_{S_L} \text{rot}(\vec{E}_{\text{INT}}) \cdot \vec{n}_\Sigma(M) dS = \oint_C \vec{E}_{\text{INT}} \cdot \vec{td} \ell = \oint_C E_{\text{INT}} \vec{e}_\theta \cdot \vec{e}_\theta d\ell = E_{\text{INT}}(t) 2\pi r.$$

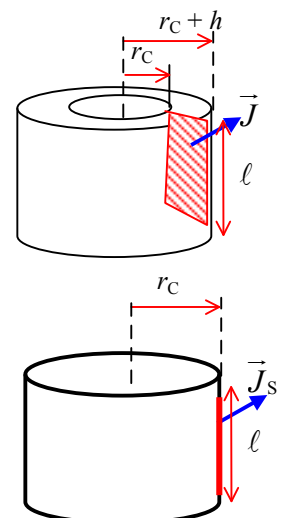
$$\bullet \iint_{S_L} \frac{\partial \vec{B}_{\text{INT}}}{\partial t} \cdot \vec{n}_\Sigma(M) dS = \frac{d}{dt} \iint_{S_L} \vec{B}_{\text{INT}} \cdot \vec{n}_\Sigma(M) dS = B_{\text{INT}}(t) \vec{e}_z \cdot \iint_S \vec{e}_z dS = B_{\text{INT}}(t) \pi r^2.$$

En reportant, on obtient $E_{\text{INT}}(t) 2\pi r = -\frac{dB_{\text{INT}}(t)}{dt} \pi r^2$.

En amplitude complexe, on obtient $\underline{E}_{\text{INT}} = -\frac{r}{2} i \omega \underline{B}_{\text{INT}}$ puis $\boxed{\underline{J} = -\gamma \frac{r}{2} i \omega \underline{B}_{\text{INT}}}$.

L'intensité qui traverse une longueur ℓ de conducteur est $i(t) = \iint \vec{J} \cdot \vec{e}_\theta dS$
 $= \iint J(r, t) \vec{e}_\theta \cdot \vec{e}_\theta dr d\ell = \int_{r_c}^{r_c+h} J(r, t) dr \int_0^\ell d\ell$. Comme $h \ll r_c$, on peut considérer que J est uniforme et a sa valeur pour $r = r_c$. On obtient alors $i(t) = J(r_c, t) \int_{r_c}^{r_c+h} dr \int_0^\ell d\ell = J(r_c, t) h \int_0^\ell d\ell$.

Dans le modèle de distribution surfacique, on écrit $i(t) = J_s(t) \int_0^\ell d\ell$.



En comparant les deux expressions, il vient $J_S(t) = J(r, t) h$ soit, en amplitude complexe,

$$\underline{J}_S = -\gamma \frac{r_C h}{2} i \omega \underline{B}_{\text{INT}}. \text{ On obtient bien une relation de la forme proposée en posant } \alpha = \frac{1}{2} \gamma r_C h.$$

c. Le champ magnétique est tangent à l'interface métal-air où circule la densité de courant \vec{J}_S . La condition de passage s'écrit donc, en un point M de la surface, $\vec{B}_{\text{EXT}}(M, t) - \vec{B}_{\text{INT}}(M, t) = \mu_0 \vec{J}_S(M) \wedge \vec{e}_r(M)$

soit, en projection, $B_{\text{EXT}}(M, t) \vec{e}_z - B_{\text{INT}}(M, t) \vec{e}_z = \mu_0 J_S(t) \vec{e}_\theta \wedge \vec{e}_r(M)$ d'où, en représentation complexe, $\underline{B}_{\text{EXT}} - \underline{B}_{\text{INT}} = -\mu_0 \underline{J}_S = \mu_0 \alpha i \omega \underline{B}_{\text{INT}}$. On obtient donc $\frac{\underline{B}_{\text{INT}}}{\underline{B}_{\text{EXT}}} = \frac{1}{1 + i \mu_0 \alpha \omega}$ qui est bien de la forme demandée en posant $\Omega_C' = 1/(\mu_0 \alpha)$.

d. $\Omega_C' = \frac{2}{(4\pi \times 10^{-7})(3,7 \times 10^7)(2,2 \times 10^{-2})(62 \times 10^{-6})} = 3,1 \times 10^4 \text{ rad}\cdot\text{s}^{-1}$ soit $f_C' = 5 \text{ kHz}$.

e. On a montré $\omega_C = (R_2 + R_G)/L_2$ à la question C.1.2.a. La condition $\omega_C \ll \Omega_C'$ peut donc s'écrire $R_2 + R_G \ll L_2 \Omega_C'$. Au voisinage de la pulsation Ω_C' , les résistances sont négligeables devant l'impédance de la bobine.

f. Le flux magnétique à travers la bobine 2 est dû au champ $\vec{B}_{\text{INT}}(t)$ intérieur au cylindre sur la section de rayon r_C et au champ $\vec{B}_{\text{EXT}}(t)$ extérieur au cylindre, de r_C à r_2 . Pour les N_2 spires, le flux est donc, en amplitude complexe, $\Phi_2 = N_2 \pi r_C^2 \underline{B}_{\text{INT}} + N_2 \pi (r_2^2 - r_C^2) \underline{B}_{\text{EXT}}$.

g. À l'intérieur de la bobine 1 ne règne que le champ $\vec{B}_{\text{INT}}(t)$ donc le flux à travers 1 est $\Phi_1(t) = N_1 \pi r_1^2 B_{\text{INT}}(t)$ et la tension est donc $u_{\text{IB}}(t) = -N_1 \pi r_1^2 \frac{dB_{\text{INT}}(t)}{dt}$ soit, en amplitude complexe, $\underline{U}_{\text{IB}} = -N_1 \pi r_1^2 i \omega \underline{B}_{\text{INT}}$. Avec $\underline{E}_G = N_2 \pi r_C^2 i \omega \underline{B}_{\text{INT}} + N_2 \pi (r_2^2 - r_C^2) i \omega \underline{B}_{\text{EXT}}$.

On en déduit $\frac{\underline{U}_{\text{IB}}}{\underline{E}_G} = \frac{-N_1 \pi r_1^2 i \omega \underline{B}_{\text{INT}}}{N_2 \pi r_C^2 i \omega \underline{B}_{\text{INT}} + N_2 \pi (r_2^2 - r_C^2) i \omega \underline{B}_{\text{EXT}}} = -\frac{N_1 r_1^2}{N_2 r_C^2} \frac{1}{1 + \left(\frac{r_2^2 - r_C^2}{r_C^2}\right) \frac{\underline{B}_{\text{EXT}}}{\underline{B}_{\text{INT}}}}$ qui est

de la forme proposée en posant $\beta(r_2, r_C) = \frac{r_2^2 - r_C^2}{r_C^2}$.

h. On a montré $\frac{\underline{B}_{\text{INT}}}{\underline{B}_{\text{EXT}}} = \frac{1}{1 + i \mu_0 \alpha \omega}$ à la question C.2.c. donc

$$\frac{\underline{U}_{\text{IB}}}{\underline{E}_G} = -\frac{N_1 r_1^2}{N_2 r_C^2} \frac{1}{1 + \beta(r_2, r_C)(1 + i \mu_0 \alpha \omega)} = -\frac{N_1 r_1^2}{N_2 r_C^2} \frac{1}{1 + \beta(r_2, r_C) + i \mu_0 \alpha \omega \beta(r_2, r_C)} \text{ soit}$$

$\frac{U_{IB}}{E_G} = -\frac{N_1 r_1^2}{N_2 r_c^2} \frac{1}{1+\beta(r_2, r_c)} \frac{1}{1+i\mu_0 \alpha \omega} \frac{\beta(r_2, r_c)}{1+\beta(r_2, r_c)}$. On a bien la forme proposée en posant

$$H_1 = -\frac{N_1 r_1^2}{N_2 r_c^2} \frac{1}{1+\beta(r_2, r_c)} \text{ ou encore } H_1 = -\frac{N_1 r_1^2}{N_2 r_c^2} \frac{1}{1+\frac{r_2^2 - r_c^2}{r_c^2}} = -\frac{N_1 r_1^2}{N_2 r_c^2} \frac{r_c^2}{r_2^2} \text{ soit } H_1 = -\frac{N_1 r_1^2}{N_2 r_2^2}.$$

et $\omega_2 = \frac{1}{\mu_0 \alpha} \frac{1+\beta(r_2, r_c)}{\beta(r_2, r_c)} = \Omega_c \cdot \frac{1+\beta(r_2, r_c)}{\beta(r_2, r_c)} = \Omega_c \cdot \left(1 + \frac{1}{\beta(r_2, r_c)}\right)$ ou encore $\omega_2 = \Omega_c \cdot \frac{r_2^2}{r_2^2 - r_c^2}$.

A.N. $\omega_2 = (3,1536 \times 10^4) \frac{(2,8)^2}{(2,8)^2 - (2,2)^2} = 8,24 \times 10^4 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$ soit $f_2 = 13 \text{ kHz}$.

On retrouve bien la valeur obtenue expérimentalement.