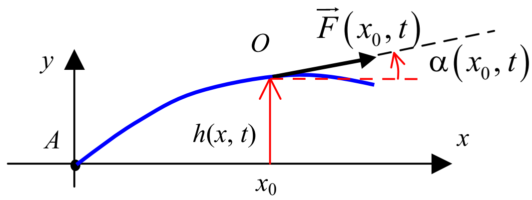
ONDES

Partie I

CCP PC 2009



I-1) En admettant que le module de $\vec{F}(x_0,t)$ est *T*, on a $F_y = T\sin(\alpha(x_0,t))$.

Comme l'angle $\alpha(x_0,t)$ est très petit devant un ,on peut faire le développement de Taylor au premier ordre $\sin(\alpha(x_0,t)) = \alpha(x_0,t) + \ldots$.

On a alors $F_y(x_0,t) = T\,\alpha(x_0,t)$.

Mais on peut faire aussi le développement $\tan(\alpha(x_0,t)) = \alpha(x_0,t) + \ldots$ avec $\tan(\alpha(x_0,t)) = \left.\dfrac{\partial h(x,t)}{\partial x}\right|_{x=x_0}$. Il reste donc $\boxed{F_y(x_0,t) = T\left.\dfrac{\partial h(x,t)}{\partial x}\right|_{x=x_0}}$.

I-2) On se place dans le référentiel lié au sol.

Le système mobile est un élément de corde de longueur *dx* compris entre les sections d'abscisses *x* et *x* + *dx* possède une masse *dm* = μ *dx* et une accélération $\vec{a}(x,t) = \dfrac{\partial^2 h(x,t)}{\partial t^2}\vec{e}_y$.

Il subit les forces $\vec{F}(x+dx,t)$ et $-\vec{F}(x,t)$. On néglige les forces de pesanteur, de raideur. Le fil est inextensible.

La loi de Newton appliquée dans le référentiel lié au sol qui est galiléen s'écrit donc $dm\,\vec{a}(x,t) = \vec{F}(x+dx,t) - \vec{F}(x,t)$ soit, en projection sur $\vec{e}_y$,

$$\mu dx\,\frac{\partial^2 h(x,t)}{\partial t^2} = F_y(x+dx,t) - F_y(x,t).$$

Avec l'expression de la question précédente, il vient

$$\mu dx\,\frac{\partial^2 h(x,t)}{\partial t^2} = T\frac{\partial h(x+dx,t)}{\partial x} - T\frac{\partial h(x,t)}{\partial x}.$$

On fait un développement de Taylor au premier ordre :

$$\frac{\partial h(x+dx,t)}{\partial x} = \frac{\partial h(x,t)}{\partial x} + \frac{\partial^2 h(x+dx,t)}{\partial x^2}dx + \ldots.$$

Après simplification, il reste $\mu\dfrac{\partial^2 h(x,t)}{\partial t^2} = T\dfrac{\partial^2 h(x,t)}{\partial x^2}$ soit $\boxed{\dfrac{\partial^2 h(x,t)}{\partial x^2} - \dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial^2 h(x,t)}{\partial t^2} = 0}$. C'est une équation de d'Alembert de célérité $\boxed{c = \sqrt{T/\mu}}$.

I-3) En un point M_0 de la corde différent de *A* ou *B* et de masse nulle, la loi de Newton s'écrit $\vec{F}_G(x_0,t) + \vec{F}(x_0,t) = \vec{0}$ où $\vec{F}_G(x_0,t)$ est la force exercée par la partie gauche de la corde en M_0 sur la partie droite. En projection sur $\vec{e}_y$, on obtient $F_{Gy}(x,t) = -F_y(x,t)$ avec

$F_{Gy}(x_0,t) = -\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ x<x_0}} \dfrac{\partial h(x,t)}{\partial x}$ et $F_y(x_0,t) = \lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ x>x_0}} \dfrac{\partial h(x,t)}{\partial x}$. On en déduit $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ x<x_0}} \dfrac{\partial h(x,t)}{\partial x} = \lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ x>x_0}} \dfrac{\partial h(x,t)}{\partial x}$: la fonction $\dfrac{\partial h(x,t)}{\partial x}$ est continue pour tout $x \in \left]x_A, x_B\right[$.

I-4) La solution proposée $h(x,t) = Z\sin(kx+\Phi)\cos(\omega t)$ doit vérifier l'équation de d'Alembert d'où $-k^2 Z\sin(kx+\Phi)\cos(\omega t) - \dfrac{1}{c^2}(-\omega^2)Z\sin(kx+\Phi)\cos(\omega t) = 0$.

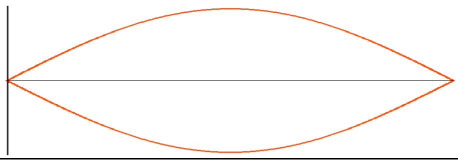
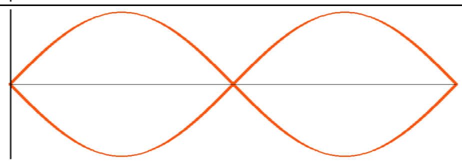
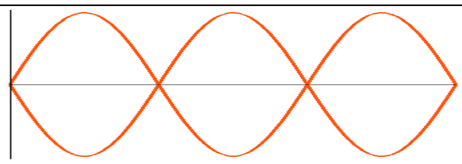
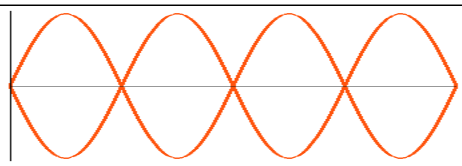
On en déduit $k^2 = \omega^2/c^2$ puis $\boxed{\omega = ck}$ en prenant ω et k positifs.

I-5) La solution doit vérifier les conditions aux limites $h(x=0,t)=0$ et $h(x=2L,t)=0$.

On a donc $h(x=0,t) = Z\sin(\Phi)\cos(\omega t) = 0$. On peut prendre $\Phi = 0$. (On peut prendre $\Phi = \pi$, cela revient à changer le signe de Z.)

Alors $h(x=2L,t) = Z\sin(2kL)\cos(\omega t) = 0$ entraîne $2k_n L = n\pi$ d'où $\boxed{k_n = n\pi/2L}$ puis $\boxed{\omega_n = n\pi c/2L}$. On en déduit enfin $\boxed{f_n = nc/4L}$.

I-6) Comme $k_n := 2\pi/\lambda_n$ par définition, les longueurs d'onde vérifient la relation $\boxed{\lambda_n = 4L/n}$. On peut alors remplir le tableau :

k	allure de la corde	nombre de nœuds	nombre de ventres
k_1		2	1
k_2		3	2
k_3		4	3
k_4		5	4

I-7) Avec l'expression $e(x,t) = \dfrac{\mu}{2}\left[\left(\dfrac{\partial h}{\partial t}\right)^2 + c^2\left(\dfrac{\partial h}{\partial x}\right)^2\right]$, on obtient pour le mode fondamental :

$$e_1(x,t) = \frac{\mu}{2}\left[\left(-\omega_1 Z\sin(k_1 x)\sin(\omega_1 t)\right)^2 + c^2\left(k_1\, Z\cos(k_1 x)\cos(\omega_1 t)\right)^2\right]$$

$$= \frac{\mu}{2}Z^2\left[\omega_1^{\,2}\sin^2(k_1 x)\sin^2(\omega_1 t) + c^2 k_1^{\,2}\cos^2(k_1 x)\cos^2(\omega_1 t)\right]$$

$$= \frac{\mu}{2}Z^2\omega_1^{\,2}\left[\sin^2(k_1 x)\sin^2(\omega_1 t) + \cos^2(k_1 x)\cos^2(\omega_1 t)\right]$$ d'après la relation de dispersion.

En valeur moyenne temporelle, il vient $\langle e_1\rangle = \dfrac{\mu}{2} Z^2 \omega_1^{\,2}\left[\sin^2(k_1 x)\dfrac{1}{2} + \cos^2(k_1 x)\dfrac{1}{2}\right]$ d'où $\langle e_1\rangle = \dfrac{1}{4}\mu\omega_1^{\,2} Z^2$. Avec l'expression de ω_1, on obtient $\boxed{\langle e_1\rangle = \dfrac{\pi^2}{16}\dfrac{\mu c^2}{L^2} Z^2}$.

I-8) On constate que cette énergie moyenne par unité de longueur est uniforme. L'énergie moyenne totale de la corde est donc $\langle E_1\rangle = 2L\langle e_1\rangle$ soit $\langle E_1\rangle = \dfrac{\pi^2}{8}\dfrac{\mu c^2}{L} Z^2$.

Avec l'expression de c, il reste $\boxed{\langle E_1\rangle = \dfrac{\pi^2}{8}\dfrac{T}{L} Z^2}$.

A.N. $Z = \dfrac{1}{\pi}\sqrt{\dfrac{8L\langle E_1\rangle}{T}} = \dfrac{1}{\pi}\sqrt{\dfrac{8(1)(0,1)}{100}} =$ 2,8 cm.

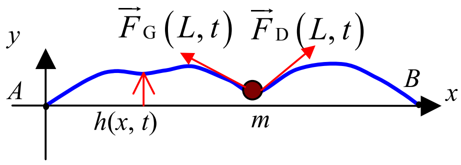
On a $Z/2L = 1{,}4\times10^{-2}$ soit 1,4% : l'approximation des petits déplacements est bien vérifiée.

Partie II

II-1) La masse située au milieu de la corde limitera le mouvement de la corde et aura plus d'effet sur les modes ayant un ventre en ce point que ceux ayant un nœud. D'après la question I-6, on peut donc prévoir que les modes de **rang impair** seront les plus perturbés.

II-2) On se place dans le référentiel lié au sol.

Le système mobile est la particule de masse m est soumise à la force exercée par la partie gauche de la corde et $\vec{F}_G(L,t)$ à celle exercée par la partie droite $\vec{F}_D(L,t)$ car on néglige les effets de la pesanteur.



Comme il n'y a pas de discontinuité temporelle de la fonction h, l'accélération de la particule est $\vec{a} = \dfrac{\partial^2 h}{\partial t^2}(L,t)\,\vec{e}_y$.

En projection sur $\vec{e}_y$, la deuxième loi de Newton s'écrit

$$\boxed{m\frac{\partial^2 h}{\partial t^2}(L,t) = T\frac{\partial h}{\partial x}(L^+,t) - T\frac{\partial h}{\partial x}(L^-,t)}.$$

II-3) Pour $x < L$, on a $h(x,t) = Z\sin(Kx)\cos(\omega t)$. Cette fonction vérifie la condition aux limites $h(x = 0, t) = 0$. Elle conduit à $\dfrac{\partial h}{\partial x}(x,t) = Z\,K\cos(Kx)\cos(\omega t)$ d'où $\dfrac{\partial h}{\partial x}(L^-,t) = Z\,K\cos(KL)\cos(\omega t)$.

Pour $x > L$, la fonction s'écrit $h(x,t) = Z\sin\big(K(2L-x)\big)\cos(\omega t)$. Cette fonction vérifie la condition aux limites $h(x = 2L, t) = 0$. Elle conduit à $\dfrac{\partial h}{\partial x}(x,t) = -Z\,K\cos\big(K(2L-x)\big)\cos(\omega t)$ d'où $\dfrac{\partial h}{\partial x}(L^+,t) = -Z\,K\cos(KL)\cos(\omega t)$.

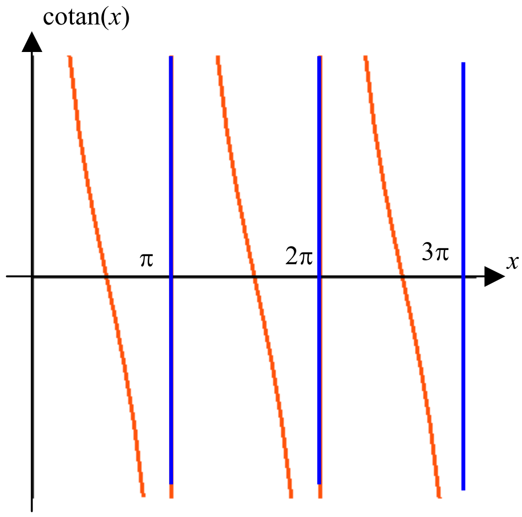
La condition aux limites en $x = L$ s'écrit alors à

$$-m\omega^2\, Z\sin(KL)\cos(\omega t) = -2Z\,KT\cos(KL)\cos(\omega t).$$

Elle est bien vérifiée quel que soit t et devient $m\omega^2\sin(KL) = 2KT\cos(KL)$ qui doit être vérifiée pour $\sin(KL) \neq 0$ (ce qui donnerait la solution $K = 0$ de peu d'intérêt). On en déduit

$$\boxed{\operatorname{cotan}(KL) = \frac{\cos(KL)}{\sin(KL)} = \frac{m\omega^2}{2KT}}.$$

II-4) La courbe demandée est tracée ci-contre :



Si $m = 0$, l'équation devient $\operatorname{cotan}(KL) = 0$ soit $K_n L = \frac{\pi}{2} + n\pi$ d'où $K_n = (2n+1)\frac{\pi}{2L}$. On retrouve les modes de rang impair trouvés à la question I-5. En particulier, le mode fondamental est $\boxed{K_1 = \frac{\pi}{2L}}$.

II-5) Avec $K \approx k_1 + \beta m$, on peut écrire $\operatorname{cotan}(KL) = \operatorname{cotan}(k_1 L + \beta mL) = \operatorname{cotan}(\pi/2 + \beta mL)$ d'après l'expression de k_1.

Le développement $\operatorname{cotan}\left(\frac{\pi}{2} + \varepsilon\right) \simeq -\varepsilon$ conduit alors à $\operatorname{cotan}(KL) = -\beta mL$.

La relation de quantification devient $-\beta mL = \frac{\cos(KL)}{\sin(KL)} = \frac{mc^2K^2}{2KT} = \frac{mc^2}{2T}(k_1 + \beta m)$ en tenant compte de la relation de dispersion.

Comme $K_1 >> \beta m$, il reste $\beta = -\frac{c^2}{2TL}k_1$ soit $\boxed{\beta = -\frac{\pi c^2}{4TL^2}}$. On a donc $K_1 < k_1$.

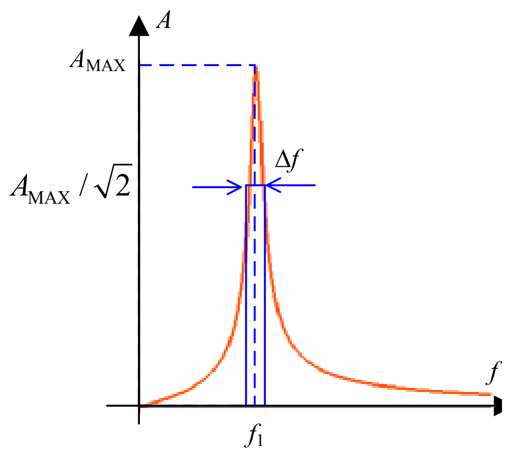
II-6) Par définition, $f = \frac{\omega}{2\pi}$ avec ici $\omega = ck$ donc $f = \frac{ck}{2\pi}$. La dérivée logarithmique s'écrit $\frac{df}{f} = \frac{dk}{k}$ d'où $\frac{\Delta f}{f_1} = \frac{\Delta k}{k_1}$. Il vient donc $\frac{\Delta f}{f_1} = -\frac{m\pi c^2 2L}{4TL^2\pi}$.

Comme $c = \sqrt{T/\mu}$, on peut écrire $\frac{\Delta f}{f_1} = -\frac{mT}{2TL\mu}$ soit $\boxed{\frac{\Delta f}{f_1} = -\frac{m}{2L\mu}}$.

A.N. $m = 2L\mu\left|\frac{\Delta f\, 4L}{\sqrt{T/\mu}}\right| = 8(1)(10^{-2})^{3/2}\left|\frac{1}{\sqrt{100}}\right| = 0{,}8$ mg.

Partie III

III-1) La relation II-6 peut s'écrire $\Delta f = -\frac{m}{2L\mu}f_1 = -\frac{m}{2L\mu}\frac{f_1^2}{c/4L}$ d'après l'expression de f_1. On obtient $\Delta f = -\frac{2m}{\mu}\frac{f_1^2}{c}$. En posant $\mu = \rho_q S$ et $c = c_q$ pour le quartz, on obtient $\boxed{\Delta f = -\frac{2m}{\rho_q S}\frac{f_1^2}{c_q}}$ qui est bien l'équation de Sauerbrey.



En notant Δf la largeur en fréquence à $A_{MAX}/\sqrt{2}$ mi-hauteur de la courbe de résonance de l'amplitude A, on a la définition du facteur de qualité $Q = f_1/\Delta f$ qui conduit à $\boxed{\Delta f = f_1/Q}$.

A.N. $\Delta f = (5\times10^6)/(2\times10^6) = 2{,}5$ Hz

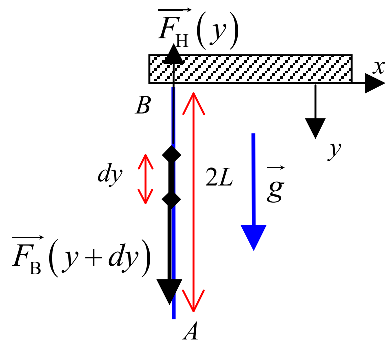
III-2) Si l'on estime la variation minimale de fréquence observable à Δf, l'équation de Sauerbrey conduit à $\dfrac{2m}{\rho_q S}\dfrac{f_1^2}{c_q} > \dfrac{f_1}{Q}$ soit $\boxed{\dfrac{m}{S} > \dfrac{c_q \rho_q}{2 f_1 Q}}$.

A.N. $m > \dfrac{(3340)(2650)(0{,}1\times10^{-4})}{2(5\times10^{6})(2\times10^{6})} = 4{,}4\times10^{-12}$ kg soit $m_{\text{MIN}} = 4{,}4\times10^{-3}$ ng.

Partie IV

Mines-Ponts PC 2007 (court extrait)

IV-1) On se place dans le référentiel lié au sol.



Le système mobile est l'élément de longueur dy compris entre y et $y + dy$ est soumis aux forces de tension $\overrightarrow{F_{\text{B}}}(y+dy)$ de la part du bas de la corde, $\overrightarrow{F_{\text{H}}}(y)$ de la part du haut et à son poids $dm\,\vec{g}$.

La condition d'équilibre s'écrit $\overrightarrow{F_{\text{B}}}(y+dy)+\overrightarrow{F_{\text{H}}}(y)+dm\,\vec{g}=\vec{0}$.

En projection sur $\vec{e}_y$, il reste $T(y+dy)-T(y)+dm\,g=\vec{0}$.

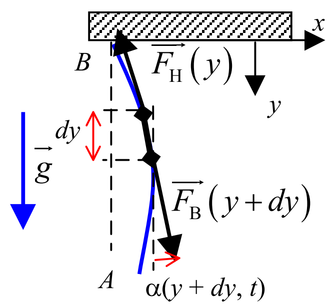
Avec $T(y+dy)=T(y)+\dfrac{dT(y)}{dy}dy+\ldots$, il reste

$$\frac{dT(y)}{dy}dy+\mu dy\,g=0.$$

On en déduit $\dfrac{dT(y)}{dy}=-\mu\,g$ qui s'intègre en $T(y)=-\mu g y + A$.

Puisque l'extrémité en A est libre, on a la condition limite $T(y=2L)=0$. On en déduit $A=\mu g 2L$ d'où finalement $\boxed{T(y)=\mu g(2L-y)}$.

IV-2) Lorsque la corde vibre transversalement avec une amplitude $h(x,t)$, l'accélération du centre d'inertie de la tranche de longueur dy est $\vec{a}(y,t)=\dfrac{\partial^2 h(y,t)}{\partial t^2}\vec{e}_x$.



La deuxième loi de Newton s'écrit donc

$$\mu dy\,\frac{\partial^2 h(y,t)}{\partial t^2}\vec{e}_x=\overrightarrow{F_{\text{B}}}(y+dy)+\overrightarrow{F_{\text{H}}}(y)+dm\,\vec{g}$$

soit, en projection sur $\vec{e}_x$,

$$\mu dy\,\frac{\partial^2 h(y,t)}{\partial t^2}=T(y+dy)\sin\big(\alpha(y+dy,t)\big)-T(y)\sin\big(\alpha(y,t)\big).$$

L'angle $\alpha(y, t)$ reste petit, on peut faire le développement limité $\sin\big(\alpha(y,t)\big)=\alpha(y,t)+\ldots$

Le développement de Taylor de la fonction $T(y+dy)\alpha(y+dy,t)$ conduit à

$$\mu dy\,\frac{\partial^2 h(y,t)}{\partial t^2}=\frac{\partial}{\partial y}\big(T(y)\alpha(y,t)\big)dy.$$

soit $\mu\,\dfrac{\partial^2 h(y,t)}{\partial t^2}=\alpha(y,t)\dfrac{\partial T(y)}{\partial y}+T(y)\dfrac{\partial \alpha(y,t)}{\partial y}$.

Comme $T(y)=\mu g(2L-y)$ et $\alpha(y,t)=\tan(\alpha(y,t))=\dfrac{\partial h(y,t)}{\partial y}$, il vient

$$\mu\frac{\partial^2 h(y,t)}{\partial t^2}=-\mu g\frac{\partial h(y,t)}{\partial y}+\mu g(2L-y)\frac{\partial^2 h(y,t)}{\partial y^2}.$$

soit $\boxed{\dfrac{\partial^2 h(y,t)}{\partial t^2}=-g\dfrac{\partial h(y,t)}{\partial y}+g(2L-y)\dfrac{\partial^2 h(y,t)}{\partial y^2}}$.

IV-3) Si on rajoute la force de frottement (qui est portée par $\vec{e}_x$) dans la deuxième loi de Newton, on obtient, après simplification par dy,

$$\boxed{\frac{\partial^2 h(y,t)}{\partial t^2}=-\frac{\alpha_f}{\mu}\frac{\partial h}{\partial t}-g\frac{\partial h(y,t)}{\partial y}+g(2L-y)\frac{\partial^2 h(y,t)}{\partial y^2}}.$$

IV-4) Au voisinage du point de fixation, on peut négliger y devant $2L$ donc l'équation devient $\dfrac{\partial^2 h(y,t)}{\partial t^2}=-\dfrac{\alpha_f}{\mu}\dfrac{\partial h}{\partial t}-g\dfrac{\partial h(y,t)}{\partial y}+2Lg\dfrac{\partial^2 h(y,t)}{\partial y^2}$.

C'est une équation linéaire, on peut chercher la solution sous forme d'une représentation complexe $\underline{h}(y,t)=\underline{h}_0\exp(j(\omega t-ky))$.

On obtient $-\omega^2\underline{h}(y,t)=-\dfrac{\alpha_f}{\mu}j\omega\,\underline{h}(y,t)+g\,jk\,\underline{h}(y,t)-2Lg\,k^2\,\underline{h}(y,t)$ soit, après simplification, $\omega^2=\dfrac{\alpha_f}{\mu}j\omega-g\,jk+2Lg\,k^2$.

k est purement réel si $\dfrac{\alpha_f}{\mu}\omega-g\,k=0$ soit $\alpha_{f0}=\mu g\dfrac{k}{\omega}$.

Alors, la partie réelle de l'équation de dispersion conduit à $\omega^2=2Lg\,k^2$ soit $\dfrac{k}{\omega}=\dfrac{1}{\sqrt{2Lg}}$ en prenant k positif.

En reportant, on obtient $\alpha_{f0}=\mu g\dfrac{1}{\sqrt{2Lg}}$ soit $\boxed{\alpha_{f0}=\mu\sqrt{\dfrac{g}{2L}}}$.

IV-5) Par définition, la vitesse de phase est $v_\varphi=\dfrac{\omega}{k}$. Si $\alpha_f=\alpha_{f0}$, on a $\boxed{v_\varphi=\sqrt{2Lg}}$ d'après la question précédente.

Si l'on pose $\boxed{c=\sqrt{2Lg}}$, on peut écrire $\omega=ck$. Or, par définition, la vitesse de groupe est $v_G=\dfrac{d\omega}{dk}$. On trouve donc $\boxed{v_G=v_\varphi=c=\sqrt{2Lg}}$.

v_φ et v_G ne dépendent pas de ω : il n'y a pas dispersion.

IV-6) Si l'on néglige le terme de frottement, la relation de dispersion devient $\omega^2=2Lg\,\underline{k}^2-g\,j\underline{k}$.

Avec $\underline{k}=k_1+jk_2$, on obtient $\omega^2=2Lg\left(k_1^2-k_2^2+2jk_1k_2\right)-g\,j(k_1+jk_2)$ soit

$$\omega^2=2Lg\left(k_1^2-k_2^2\right)+gk_2+jgk_1(4Lk_2-1).$$

Cette équation n'est vérifiée que si $\boxed{k_2=1/4L}$ (car $k_1\neq 0$ pour avoir un terme progressif).

En grandeur réel, la solution s'écrit $h(y,t) = \mathrm{Re}\left(\underline{h}_0 \exp\left(j\left(\omega t - (k_1 + jk_2)y\right)\right)\right)$ soit $h(y,t) = h_0 e^{k_2 y} \cos(\omega t - k_1 y + \varphi_0)$. Comme k_2 est positif, $h(y, t)$ augmente quand y augmente, c'est-à- dire dans le sens de la propagation.

Cette amplification permet de compenser un éventuel frottement. Une propagation **sans atténuation** est donc possible dans ce cas, comme vu à la question IV-4.

IV-7) Avec cette valeur de k_2, il reste $\omega^2 = 2Lg\left(k_1^2 - k_2^2\right) + gk_2$ $= 2Lg\left(k_1^2 - (1/4L)^2\right) + g/4L = 2Lgk_1^2 - (g/8L) + g/4L = 2Lgk_1^2 + g/8L$. On posant $\omega_0^2 = \dfrac{g}{8L}$, on peut écrire $\boxed{k_1^2 = \dfrac{\omega^2 - \omega_0^2}{2Lg}}$ ou encore $\boxed{k_1^2 = \dfrac{\omega^2 - \omega_0^2}{c^2}}$.

On a k_1 réel (c'est-à-dire une onde progressive) seulement si $\omega > \omega_0$: la corde se comporte comme un filtre passe-haut pour les ondes progressives.

IV-8) En différentiant la relation de dispersion, on obtient $2c^2\, k_1 dk_1 = 2\omega d\omega$. On en déduit $v_G = \dfrac{d\omega}{dk_1} = c^2 \dfrac{k_1}{\omega} = c^2 \dfrac{1}{v_\varphi}$. il vient donc $\boxed{v_G\, v_\varphi = c^2}$.