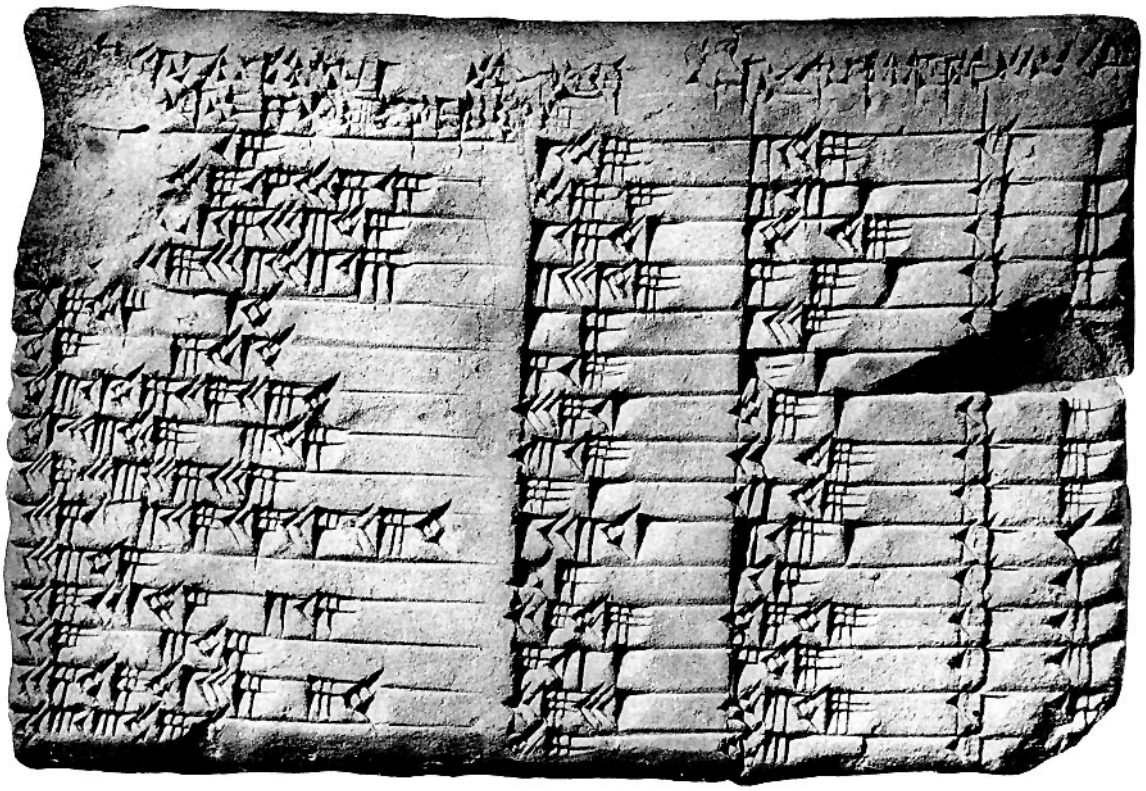
Cahier de calcul

— pratique et entraînement —



Plimpton 322, tablette d'argile babylonienne (1 800 av. JC)

Cette tablette, vieille de près de 4 000 ans, donne une liste de triplets pythagoriciens, c'est-à-dire de triplets (a, b, c) de nombres entiers vérifiant $a^2 + b^2 = c^2$.

Ce cahier de calcul a été écrit collectivement.

Coordination

Colas Bardavid

Équipe des participants

Vincent Bayle, Romain Basson, Olivier Bertrand, Ménard Bourgade, Julien Bureaux, Alain Camanes, Mathieu Charlot, Mathilde Colin de Verdière, Keven Commault, Miguel Concy, Rémy Eupherte, Hélène Gros, Audrey Hechner, Florian Hechner, Marie Hézard, Nicolas Laillet, Valérie Le Blanc, Thierry Limoges, Quang-Thai Ngo, Xavier Pellegrin, Fabien Pellegrini, Jean-Louis Pourtier, Valérie Robert, Jean-Pierre Técourt, Guillaume Tomasini, Marc Tenti

Le pictogramme de l'horloge a été créé par Ralf Schmitzer (The Noun Project).

La photographie de la couverture vient de Wikipedia.

Version 1.13 — 26 août 2023

Fractions

Prérequis
Règles de calcul sur les fractions.

Calculs dans l'ensemble des rationnels

Calcul 1.1 — Simplification de fractions.

Simplifier les fractions suivantes (la lettre k désigne un entier naturel non nul).

a) $\dfrac{32}{40}$ .....

b) $8^3 \times \dfrac{1}{4^2}$ .....

c) $\dfrac{27^{-1} \times 4^2}{3^{-4} \times 2^4}$ .....

d) $\dfrac{(-2)^{2k+1} \times 3^{2k-1}}{4^k \times 3^{-k+1}}$ .....

Calcul 1.2 — Sommes, produits, quotients, puissances.

Écrire les nombres suivants sous forme d'une fraction irréductible.

a) $\dfrac{2}{4} - \dfrac{1}{3}$ .....

b) $\dfrac{2}{3} - 0{,}2$ .....

c) $\dfrac{36}{25} \times \dfrac{15}{12} \times 5$ .....

d) $-\dfrac{2}{15} \div \left(-\dfrac{6}{5}\right)$ .....

Calcul 1.3

Écrire les nombres suivants sous forme d'une fraction irréductible.

a) $(2 \times 3 \times 5 \times 7)\left(\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{5} + \dfrac{1}{7}\right)$ .....

b) $\left(\dfrac{136}{15} - \dfrac{28}{5} + \dfrac{62}{10}\right) \times \dfrac{21}{24}$ .....

c) $\dfrac{5^{10} \times 7^3 - 25^5 \times 49^2}{(125 \times 7)^3 + 5^9 \times 14^3}$ .....

d) $\dfrac{1\,978 \times 1\,979 + 1\,980 \times 21 + 1958}{1\,980 \times 1\,979 - 1\,978 \times 1\,979}$ .....

Calcul 1.4 — Un petit calcul.

Écrire $\dfrac{0{,}5 - \frac{3}{17} + \frac{3}{37}}{\frac{5}{6} - \frac{5}{17} + \frac{5}{37}} + \dfrac{0{,}5 - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - 0{,}2}{\frac{7}{5} - \frac{7}{4} + \frac{7}{3} - 3{,}5}$ sous forme d'une fraction irréductible. .....

Calcul 1.5 — Le calcul littéral à la rescousse.

En utilisant les identités remarquables et le calcul littéral, calculer les nombres suivants.

a) $\dfrac{2\,022}{(-2\,022)^2 + (-2\,021)(2\,023)}$ ..

b) $\dfrac{2\,021^2}{2\,020^2 + 2\,022^2 - 2}$ .....

c) $\dfrac{1\,235 \times 2\,469 - 1\,234}{1\,234 \times 2\,469 + 1\,235}$ .....

d) $\dfrac{4\,002}{1\,000 \times 1\,002 - 999 \times 1\,001}$ ...

Calcul 1.6 — Les fractions et le calcul littéral.

Mettre sous la forme d'une seule fraction, qu'on écrira sous la forme la plus simple possible.

a) $\dfrac{1}{(n+1)^2}+\dfrac{1}{n+1}-\dfrac{1}{n}$ pour $n\in\mathbb{N}^*$ .....

b) $\dfrac{a^3-b^3}{(a-b)^2}-\dfrac{(a+b)^2}{a-b}$ pour $(a,b)\in\mathbb{Z}^2$, distincts deux à deux. .....

c) $\dfrac{\frac{6(n+1)}{n(n-1)(2n-2)}}{\frac{2n+2}{n^2(n-1)^2}}$ pour $n\in\mathbb{N}^*\setminus\{1\}$. .....

Calcul 1.7 — Le quotient de deux sommes de Gauss.

Simplifier $\dfrac{\sum\limits_{k=0}^{n^2}k}{\sum\limits_{k=0}^{n}k}$ pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, en utilisant la formule $1+2+\cdots+p=\dfrac{p(p+1)}{2}$. .....

Calcul 1.8 — Décomposition en somme d'une partie entière et d'une partie décimale.

Soit $k\in\mathbb{R}\setminus\{1\}$ et $x\in\mathbb{R}\setminus\{2\}$. Écrire les fractions suivantes sous la forme $a+\dfrac{b}{X}$ avec a et b entiers et $X\in\mathbb{R}$.

a) $\dfrac{29}{6}$ .....

b) $\dfrac{k}{k-1}$ ...

c) $\dfrac{3x-1}{x-2}$ ..

Calcul 1.9 — Un produit de fractions.

Soit $t\in\mathbb{R}\setminus\{-1\}$. On donne $A=\dfrac{1}{1+t^2}-\dfrac{1}{(1+t)^2}$ et $B=\big(1+t^2\big)(1+t)^2$.

Simplifier AB autant que possible. .....

Comparaison

Calcul 1.10 — Règles de comparaison.

Comparer les fractions suivantes avec le signe « $>$ », « $<$ » ou « $=$ ».

a) $\dfrac{3}{5}\cdots\dfrac{5}{9}$ .....

b) $\dfrac{12}{11}\cdots\dfrac{10}{12}$ .....

c) $\dfrac{125}{25}\cdots\dfrac{105}{21}$ ....

Calcul 1.11 — Produit en croix.

Les nombres $A=\dfrac{33\ 215}{66\ 317}$ et $B=\dfrac{104\ 348}{208\ 341}$ sont-ils égaux ? Oui ou non ? .....

Calcul 1.12 — Produit en croix.

On pose $A=\dfrac{100\ 001}{1\ 000\ 001}$ et $B=\dfrac{1\ 000\ 001}{10\ 000\ 001}$: a-t-on $A>B$, $A=B$ ou $A<B$? .....

Puissances

Prérequis
Opérations sur les puissances (produits, quotients), décompostion en facteurs premiers, sommes d'expressions fractionnaires (même dénominateur), identités remarquables, factorisations et développements simples.

Calcul 2.1

Dans chaque cas, donner le résultat sous la forme d'une puissance de 10.

a) $10^5 \cdot 10^3$ ..... ☐

b) $(10^5)^3$ ..... ☐

c) $\dfrac{10^5}{10^3}$ ..... ☐

d) $\dfrac{10^{-5}}{10^{-3}}$ ..... ☐

e) $\dfrac{(10^5 \cdot 10^{-3})^5}{(10^{-5} \cdot 10^3)^{-3}}$ .... ☐

f) $\dfrac{(10^3)^{-5} \cdot 10^5}{10^3 \cdot 10^{-5}}$ ..... ☐

Calcul 2.2

Dans chaque cas, donner le résultat sous la forme a^n avec a et n deux entiers relatifs.

a) $3^4 \cdot 5^4$ ..... ☐

b) $(5^3)^{-2}$ ..... ☐

c) $\dfrac{2^5}{2^{-2}}$ ..... ☐

d) $(-7)^3 \cdot (-7)^{-5}$ .... ☐

e) $\dfrac{6^5}{2^5}$ ..... ☐

f) $\dfrac{(30^4)^7}{2^{28} \cdot 5^{28}}$ ..... ☐

Calcul 2.3

Dans chaque cas, donner le résultat sous la forme $2^n \cdot 3^p$, où n et p sont deux entiers relatifs.

a) $\dfrac{2^3 \cdot 3^2}{3^4 \cdot 2^8 \cdot 6^{-1}}$ ..... ☐

b) $2^{21} + 2^{22}$ ..... ☐

c) $\dfrac{3^{22} + 3^{21}}{3^{22} - 3^{21}}$ ..... ☐

d) $\dfrac{\left(3^2 \cdot (-2)^4\right)^8}{\left((-3)^5 \cdot 2^3\right)^{-2}}$ ..... ☐

Calcul 2.4

Dans chaque cas, simplifier au maximum.

a) $\dfrac{8^{17} \cdot 6^{-6}}{9^{-3} \cdot 2^{42}}$ ..... ☐

b) $\dfrac{55^2 \cdot 121^{-2} \cdot 125^2}{275 \cdot 605^{-2} \cdot 25^4}$ ..... ☐

c) $\dfrac{12^{-2} \cdot 15^4}{25^2 \cdot 18^{-4}}$ ..... ☐

d) $\dfrac{36^3 \cdot 70^5 \cdot 10^2}{14^3 \cdot 28^2 \cdot 15^6}$ ..... ☐

Calcul 2.5

Dans chaque cas, simplifier au maximum l'expression en fonction du réel x.

a) $\dfrac{x}{x-1} - \dfrac{2}{x+1} - \dfrac{2}{x^2-1}$ ..... ☐

b) $\dfrac{2}{x+2} - \dfrac{1}{x-2} + \dfrac{8}{x^2-4}$ ..... ☐

c) $\dfrac{x^2}{x^2-x} + \dfrac{x^3}{x^3+x^2} - \dfrac{2x^2}{x^3-x}$ ..... ☐

d) $\dfrac{1}{x} + \dfrac{x+2}{x^2-4} + \dfrac{2}{x^2-2x}$ ..... ☐

Fiche de calcul n° 3

Calcul littéral

Prérequis
Les identités remarquables.

Développer, réduire et ordonner

Dans cette section, on tâchera de mener les calculs avec le minimum d'étapes. Idéalement, on écrira directement le résultat. La variable x représente un nombre réel (ou complexe).

Calcul 3.1

Développer, réduire et ordonner les expressions suivantes selon les puissances décroissantes de x.

a) $\left(2x-\frac{1}{2}\right)^3$ .....

b) $(x-1)^3\left(x^2+x+1\right)$ .....

c) $(x+1)^2(x-1)\left(x^2-x+1\right)$ ....

d) $(x+1)^2(x-1)\left(x^2+x+1\right)$ ....

e) $(x-1)^2(x+1)\left(x^2+x+1\right)$ ....

f) $\left(x^2+x+1\right)\left(x^2-x+1\right)$ .....

Calcul 3.2

Développer, réduire et ordonner les expressions polynomiales suivantes selon les puissances croissantes de x.

a) $(x-2)^2\left(-x^2+3x-1\right)-(2x-1)(x^3+2)$ .....

b) $(2x+3)(5x-8)-(2x-4)(5x-1)$ .....

c) $\Big((x+1)^2(x-1)\left(x^2-x+1\right)+1\Big)x-x^6-x^5+2$ .....

d) $(x+1)(x-1)^2-2\left(x^2+x+1\right)$ .....

e) $\left(x^2+\sqrt{2}x+1\right)\left(1-\sqrt{2}x+x^2\right)$ .....

f) $\left(x^2+x+1\right)^2$ .....

Factoriser

Calcul 3.3 — Petite mise en jambe.

Factoriser les expressions polynomiales de la variable réelle x suivantes.

a) $-(6x+7)(6x-1)+36x^2-49$ .....

b) $25-(10x+3)^2$ .....

c) $(6x-8)(4x-5)+36x^2-64$ .....

d) $(-9x-8)(8x+8)+64x^2-64$ .....

Calcul 3.4 — À l'aide de la forme canonique.

Factoriser les polynômes de degré deux suivants en utilisant leur forme canonique. On rappelle que la forme canonique de ax^2+bx+c est $a\left[\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)^2-\dfrac{b^2-4ac}{4a^2}\right]$ (où $a\neq 0$).

a) x^2-2x+1 .....

b) x^2+4x+4 .....

c) x^2+3x+2 .....

d) $3x^2+7x+1$ .....

e) $2x^2+3x-28$ .....

f) $-5x^2+6x-1$ .....

Calcul 3.5 — Avec plusieurs variables.

Factoriser sur $\mathbb{R}$ les expressions polynomiales suivantes dont les variables représentent des nombres réels.

a) $(x+y)^2-z^2$ .....

b) $x^2+6xy+9y^2-169x^2$ .....

c) $xy+x+y+1$ .....

d) $xy-x-y+1$ .....

e) $x^3+x^2y+2x^2+2xy+x+y$ ..

f) $y^2\big(a^2+b^2\big)+16x^4\big(-a^2-b^2\big)$ ..

Calcul 3.6 — On passe au niveau supérieur.

Factoriser sur $\mathbb{R}$ les expressions polynomiales suivantes dont les variables représentent des nombres réels.

a) x^4-1 .....

b) $\big(-9x^2+24\big)\big(8x^2+8\big)+64x^4-64$ .....

c) x^4+x^2+1 .....

d) $(ac+bd)^2+(ad-bc)^2$ .....

e) $(ap+bq+cr+ds)^2+(aq-bp-cs+dr)^2+(ar+bs-cp-dq)^2+(as-br+cq-dp)^2$.

Racines carrées

Prérequis
Racines carrées. Méthode de la quantité conjuguée.

Premiers calculs

Calcul 4.1 — Définition de la racine carrée.

Simplifier les expressions suivantes en simplifiant les symboles $\sqrt{\cdot}$ qui peuvent l'être (et en prenant à ne pas se tromper sur les signes).

a) $\sqrt{(-5)^2}$ .....

b) $\sqrt{(\sqrt{3}-1)^2}$ .....

c) $\sqrt{(\sqrt{3}-2)^2}$ .....

d) $\sqrt{(2-\sqrt{7})^2}$ .....

e) $\sqrt{(3-\pi)^2}$ .....

f) $\sqrt{(3-a)^2}$ .....

Calcul 4.2 — Transformation d'écriture.

Écrire aussi simplement que possible les expressions suivantes.

a) $(2\sqrt{5})^2$ .....

b) $(2+\sqrt{5})^2$ .....

c) $\sqrt{4+2\sqrt{3}}$ .....

d) $\sqrt{11+6\sqrt{2}}$ .....

e) $(3+\sqrt{7})^2-(3-\sqrt{7})^2$ .....

f) $\left(\sqrt{2\sqrt{3}}\right)^4$ .....

g) $\left(\dfrac{5-\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\right)^2$ .....

h) $(\sqrt{2}+\sqrt{3})^2+(\sqrt{2}-\sqrt{3})^2$ .....

Avec la méthode de la quantité conjuguée

Calcul 4.3

Rendre rationnels les dénominateurs des expressions suivantes.

a) $\dfrac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{2}}$ .....

b) $\dfrac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}$ .....

c) $\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}$ .....

d) $\dfrac{\sqrt{5}-\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$ .....

e) $\dfrac{1}{\sqrt{2}-\sqrt{3}}$ .....

f) $\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{1-\sqrt{3}}$ .....

g) $\dfrac{5+2\sqrt{6}}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}+\dfrac{5-2\sqrt{6}}{\sqrt{2}-\sqrt{3}}$ .....

h) $\left(\dfrac{5\sqrt{2}}{\sqrt{3}+1}\right)^2$ .....

Calcul 4.4

Exprimer la quantité suivante sans racine carrée au dénominateur.

$\dfrac{1}{1+\sqrt{2}+\sqrt{3}}$ .....

Calculs variés

Calcul 4.5 — Avec une variable.

On considère la fonction f qui à $x > 1$ associe $f(x) = \sqrt{x-1}$.

Pour tout $x > 1$, calculer et simplifier les expressions suivantes.

a) $f(x) + \dfrac{1}{f(x)}$ .....

b) $\dfrac{f(x+2) - f(x)}{f(x+2) + f(x)}$ .....

c) $\sqrt{x + 2f(x)}$ .....

d) $\dfrac{f'(x)}{f(x)}$ .....

e) $f(x) + 4f''(x)$ .....

f) $\dfrac{f(x)}{f''(x)}$ .....

Calcul 4.6 — Mettre au carré.

Élever les quantités suivantes au carré pour en donner une expression simplifiée.

a) $\sqrt{3+\sqrt{5}} - \sqrt{3-\sqrt{5}}$ .....

b) $\sqrt{3-2\sqrt{2}} + \sqrt{3+2\sqrt{2}}$ .....

Calcul 4.7 — Méli-mélo.

Donner une écriture simplifiée des réels suivants.

a) $\dfrac{3-\sqrt{5}}{2+\sqrt{5}}$ .....

b) $\sqrt{3+2\sqrt{2}}$ .....

c) $\sqrt{\dfrac{2+\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}}}$ .....

d) $3\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\ln 3}$ .....

e) $2\sqrt{\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}}$ .....

f) $\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}$ .....

Calcul 4.8

On note $A = \sqrt[3]{3+\sqrt{9+\dfrac{125}{27}}} - \sqrt[3]{-3+\sqrt{9+\dfrac{125}{27}}}$. Simplifier A

On commencera par exprimer A^3 en fonction de A. .....

Expressions algébriques

Prérequis
Identités remarquables.

Équations polynomiales

Calcul 5.1 — Cubique.

Soit a un nombre réel tel que $a^3 - a^2 + 1 = 0$.
Exprimer les quantités suivantes sous la forme $xa^2 + ya + z$ où x, y, z sont trois nombres rationnels.

a) $(a+2)^3$ .....
b) $a^5 - a^6$ .....
c) a^{12} .....
d) $\frac{1}{a} + \frac{1}{a^2}$ .....

Calcul 5.2 — Introduction aux nombres complexes.

Soit i un nombre tel que $\mathrm{i}^2 = -1$.
Exprimer les quantités suivantes sous la forme $x + \mathrm{i}y$ où x, y sont deux réels.

a) $(3+\mathrm{i})^2$ .....
b) $(3-\mathrm{i})^2$ .....
c) $(3-\mathrm{i})^3$ .....
d) $(3-2\mathrm{i})^3$ .....

Calcul 5.3

Même exercice.

a) $(4-5\mathrm{i})(6+3\mathrm{i})$ .....
b) $(2+3\mathrm{i})^3(2-3\mathrm{i})^3$ .....
c) $\left(-4+\mathrm{i}\sqrt{5}\right)^3$ .....
d) $\left(-\frac{1}{2}+\mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3$ .....

Calcul 5.4 — Puissance cinquième.

Soit a un nombre distinct de 1 tel que $a^5 = 1$. Calculer les nombres suivants :

a) $a^7 - 3a^6 + 4a^5 - a^2 + 3a - 1$ .....
b) $a^{1234} \times a^{2341} \times a^{3412} \times a^{4123}$ .....
c) $\prod_{k=0}^{1234} a^k$ .....
d) $1 + a + a^2 + a^3 + a^4$ .....
e) $\sum_{k=1}^{99} a^k$ .....
f) $\prod_{k=0}^{4} (2 - a^k)$ .....

Expressions symétriques

Calcul 5.5 — Inverse.

Soit x un réel non nul. On pose $a = x - \dfrac{1}{x}$. Exprimer les quantités suivantes en fonction de a uniquement.

a) $x^2 + \dfrac{1}{x^2}$ .... b) $x^3 - \dfrac{1}{x^3}$ .... c) $x^4 + \dfrac{1}{x^4}$ ....

Calcul 5.6 — Trois variables.

Soient x, y, z trois nombres deux à deux distincts. On pose

$$a = x + y + z, \qquad b = xy + yz + zx \qquad \text{et} \qquad c = xyz.$$

Exprimer les quantités suivantes en fonction de a, b, c uniquement.

a) $x^2 + y^2 + z^2$ .....

b) $x^2(y+z) + y^2(z+x) + z^2(x+y)$ .....

c) $x^3 + y^3 + z^3$ .....

d) $(x+y)(y+z)(z+x)$ .....

e) $x^2yz + y^2zx + z^2xy$ .....

f) $x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2$ .....

Calcul 5.7

Même exercice.

a) $x^3(y+z) + y^3(z+x) + z^3(x+y)$ .....

b) $x^4 + y^4 + z^4$ .....

c) $\dfrac{x}{(x-y)(x-z)} + \dfrac{y}{(y-z)(y-x)} + \dfrac{z}{(z-x)(z-y)}$ .....

d) $\dfrac{x^2}{(x-y)(x-z)} + \dfrac{y^2}{(y-z)(y-x)} + \dfrac{z^2}{(z-x)(z-y)}$ .....

e) $\dfrac{x^3}{(x-y)(x-z)} + \dfrac{y^3}{(y-z)(y-x)} + \dfrac{z^3}{(z-x)(z-y)}$ .....

Équations du second degré

Prérequis
Relations entre coefficients et racines.

Dans cette fiche :

- tous les trinômes considérés sont réels ;
- on ne s'intéresse qu'à leurs éventuelles **racines réelles** ;
- tous les paramètres sont choisis de telle sorte que l'équation considérée soit bien de degré 2.

Les formules donnant explicitement les racines d'une équation du second degré en fonction du discriminant **ne servent nulle part** dans cette fiche d'exercices !

Recherche de racines

Calcul 6.1 — Des racines vraiment évidentes.

Résoudre mentalement les équations suivantes. *Les racines évidentes sont à chercher parmi* $0, 1, -1, 2, -2$ *ainsi éventuellement que* 3 *et* -3.

a) $x^2 - 6x + 9 = 0$ .....

b) $9x^2 + 6x + 1 = 0$ .....

c) $x^2 + 4x - 12 = 0$ .....

d) $x^2 - 5x + 6 = 0$ .....

e) $x^2 - 5x = 0$ .....

f) $2x^2 + 3x = 0$ .....

g) $2x^2 + 3 = 0$ .....

h) $x^2 + 4x - 5 = 0$ .....

i) $3x^2 - 11x + 8 = 0$ .....

j) $5x^2 + 24x + 19 = 0$ .....

Calcul 6.2 — Somme et produit.

Résoudre mentalement les équations suivantes.

a) $x^2 - 13x + 42 = 0$ .....

b) $x^2 + 8x + 15 = 0$ .....

c) $x^2 + 18x + 77 = 0$ .....

d) $x^2 - 8x - 33 = 0$ .....

e) $x^2 - (a+b)x + ab = 0$ .....

f) $x^2 - 2ax + a^2 - b^2 = 0$ .....

Calcul 6.3 — L'une grâce à l'autre.

Calculer la seconde racine des équations suivantes.

a) $3x^2 - 14x + 8 = 0$ sachant que $x = 4$ est racine .....

b) $7x^2 + 23x + 6 = 0$ sachant que $x = -3$ est racine .....

c) $mx^2 + (2m+1)x + 2 = 0$ sachant que $x = -2$ est racine .....

d) $(m+3)x^2 - (m^2+5m)x + 2m^2 = 0$ sachant que $x = m$ est racine .....

Calcul 6.4 — Racine évidente.

Trouver une racine des équations suivantes et calculer l'autre en utilisant les relations entre les coefficients du trinôme et ses racines.

Seuls les deux derniers calculs ne se font pas de tête.

a) $(b-c)x^2+(c-a)x+(a-b)=0$ .....

b) $a(b-c)x^2+b(c-a)x+c(a-b)=0$ .....

c) $(x+a)(x+b)=(m+a)(m+b)$ .....

d) $(b-c)x^2+(c-a)mx+(a-b)m^2=0$ .....

e) $\dfrac{x}{a}+\dfrac{b}{x}=\dfrac{m}{a}+\dfrac{b}{m}$ .....

f) $\dfrac{1}{x-a}+\dfrac{1}{x-b}=\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}$ .....

Recherche d'équations

Calcul 6.5 — À la recherche de l'équation.

En utilisant la somme et le produit des racines d'une équation du second degré, former l'équation du second degré admettant comme racines les nombres suivants.

a) 9 et 13 .....

b) -11 et 17 .....

c) $2+\sqrt{3}$ et $2-\sqrt{3}$ .....

d) $m+\sqrt{m^2-3}$ et $m-\sqrt{m^2-3}$ .....

e) $m+3$ et $\dfrac{2m-5}{2}$ .....

f) $\dfrac{m+1}{m}$ et $\dfrac{m-2}{m}$ .....

Calcul 6.6 — Avec le discriminant.

Déterminer la valeur à donner à m pour que les équations suivantes admettent une racine double, et préciser la valeur de la racine dans ce cas.

a) $x^2-(2m+3)x+m^2=0$ .....

b) $(m+2)x^2-2(m-1)x+4=0$ .....

c) $(m+3)x^2+2(3m+1)x+(m+3)=0$ .....

Factorisations et signe

Calcul 6.7 — Factorisation à vue.

Déterminer de tête les valeurs des paramètres a et b pour que les égalités suivantes soient vraies pour tout x.

a) $2x^2+7x+6=(x+2)(ax+b)$ .....

b) $-4x^2+4x-1=(2x-1)(ax+b)$ .....

c) $-3x^2+14x-15=(x-3)(ax+b)$ .....

d) $\frac{1}{2}x^2+\frac{11}{2}x-40=(x-5)(ax+b)$ .....

e) $x^2+2\sqrt{7}x-21=(x-\sqrt{7})(ax+b)$ .....

Calcul 6.8 — Signe d'un trinôme.

Déterminer l'ensemble des valeurs de x pour lesquelles les expressions suivantes sont positives ou nulles.

a) $x^2-(\sqrt{2}+1)x+\sqrt{2}$ .....

b) $-x^2+2x+15$ .....

c) $(x+1)(3x-2)$ .....

d) $\frac{x-4}{2x+1}$ .....

Exponentielle et logarithme

Prérequis
Exponentielle, logarithme.

Logarithmes

Calcul 7.1

Calculer les nombres suivants en fonction de $\ln 2$, $\ln 3$ et $\ln 5$.

a) $\ln 16$ .....

b) $\ln 512$ .....

c) $\ln 0{,}125$ .....

d) $\frac{1}{8}\ln\frac{1}{4} - \frac{1}{4}\ln\frac{1}{8}$ .....

e) $\ln 72 - 2\ln 3$ .....

f) $\ln 36$ .....

Calcul 7.2

Calculer les nombres suivants en fonction de $\ln 2$, $\ln 3$ et $\ln 5$.

a) $\ln\frac{1}{12}$ .....

b) $\ln(2{,}25)$ .....

c) $\ln 21 + 2\ln 14 - 3\ln(0{,}875)$ .....

d) $\ln 500$ .....

e) $\ln\frac{16}{25}$ .....

f) $\ln(6{,}25)$ .....

Calcul 7.3

Calculer les nombres suivants en fonction de $\ln 2$, $\ln 3$ et $\ln 5$.

$\ln\frac{1}{2} + \ln\frac{2}{3} + \cdots + \ln\frac{98}{99} + \ln\frac{99}{100}$ .....

Calcul 7.4 — Logarithme et radicaux.

a) On pose $\alpha = \frac{7}{16}\ln(3+2\sqrt{2}) - 4\ln(\sqrt{2}+1)$. Calculer $(1+\sqrt{2})^2$ et $\frac{1}{\sqrt{2}+1}$.

En déduire une écriture simplifiée de α en fonction de $\ln(\sqrt{2}-1)$.....

b) Calculer β sachant que $\ln\beta = \ln(7+5\sqrt{2}) + 8\ln(\sqrt{2}+1) + 7\ln(\sqrt{2}-1)$ .....

c) Simplifier $\gamma = \ln\left((2+\sqrt{3})^{20}\right) + \ln\left((2-\sqrt{3})^{20}\right)$ .....

d) Simplifier $\delta = \ln\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right) + \ln\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)$. .....

Exponentielles

Calcul 7.5

Écrire les nombres suivants le plus simplement possible.

a) $\mathrm{e}^{3\ln 2}$ .....

b) $\ln(\sqrt{e})$ .....

c) $\ln(\mathrm{e}^{\frac{1}{3}})$ .....

d) $\mathrm{e}^{-2\ln 3}$ .....

e) $\ln(\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}})$ .....

f) $\mathrm{e}^{\ln 3-\ln 2}$ .....

Calcul 7.6

Écrire les nombres suivants le plus simplement possible.

a) $-\mathrm{e}^{-\ln\frac{1}{2}}$ .....

b) $\mathrm{e}^{-\ln\ln 2}$ .....

c) $\ln\left(\dfrac{1}{\mathrm{e}^{17}}\right)$ .....

d) $\ln(\sqrt{\mathrm{e}^4})-\ln(\sqrt{\mathrm{e}^2})$ .....

e) $\ln\left(\sqrt{\exp(-\ln \mathrm{e}^2)}\right)$ .....

f) $\exp\left(-\dfrac{1}{3}\ln(\mathrm{e}^{-3})\right)$ .....

Études de fonctions

Calcul 7.7 — Parité.

Étudier la parité des fonctions suivantes.

a) $f_1 : x \longmapsto \ln\dfrac{2021+x}{2021-x}$ .....

b) $f_2 : x \longmapsto \ln(x+\sqrt{x^2+1})$ .....

c) $f_3 : x \longmapsto \dfrac{\mathrm{e}^{2x}-1}{\mathrm{e}^{2x}+1}$ .....

d) $f_4 : x \longmapsto \dfrac{\mathrm{e}^{x}-\mathrm{e}^{-x}}{\mathrm{e}^{x}+\mathrm{e}^{-x}}$ .....

Calcul 7.8 — Étude d'une fonction.

Soit $f : x \longmapsto \dfrac{\mathrm{e}^{x}-\mathrm{e}^{-x}}{\mathrm{e}^{x}+\mathrm{e}^{-x}}$.

a) Préciser l'ensemble de définition de cette fonction. .....

b) Montrer que pour tous réels a et b on a $f(a+b)=\dfrac{f(a)+f(b)}{1+f(a)f(b)}$. .....

c) Déterminer la limite de f en $+\infty$. .....

d) Déterminer la limite de f en $-\infty$. .....

Calcul 7.9

On considère l'application

$$f : \begin{cases} \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \ln(1+x). \end{cases}$$

Calculer et simplifier les expressions suivantes pour tout $x \in \mathbb{R}$ pour lequel elles sont définies.

a) $f(2\mathrm{e}^x - 1)$ .....

b) $\mathrm{e}^{x-\frac{1}{2}f(x)}$ .....

c) $\dfrac{1}{2}f(x^2-2x)$ .....

d) $xf'(x) - 1$ .....

e) $\mathrm{e}^{\frac{f(x)}{f'(x-1)}}$ .....

Équations, inéquations

Calcul 7.10

Résoudre les équations et inéquations suivantes (d'inconnue x).

a) $\mathrm{e}^{3x-5} \geqslant 12$ .....

b) $1 \leqslant \mathrm{e}^{-x^2+x}$ .....

c) $\mathrm{e}^{1+\ln x} \geqslant 2$ .....

d) $\mathrm{e}^{-6x} \leqslant \sqrt{\mathrm{e}}$ .....

e) $\ln(-x-5) = \ln(x-61) - \ln(x+7)$ .....

f) $\ln(-x-5) = \ln\dfrac{x-61}{x+7}$ .....

Fiche n° 1. Fractions

Réponses

1.1 a) ..... $\boxed{\frac{4}{5}}$

1.1 b) ..... $\boxed{2^5}$

1.1 c) ..... $\boxed{3}$

1.1 d) ..... $\boxed{-2\times 3^{3k-2}}$

1.2 a) ..... $\boxed{\frac{1}{6}}$

1.2 b) ..... $\boxed{\frac{7}{15}}$

1.2 c) ..... $\boxed{9}$

1.2 d) ..... $\boxed{\frac{1}{9}}$

1.3 a) ..... $\boxed{247}$

1.3 b) ..... $\boxed{\frac{203}{24}}$

1.3 c) ..... $\boxed{\frac{-10}{3}}$

1.3 d) ..... $\boxed{1\ 000}$

1.4 ..... $\boxed{\frac{16}{35}}$

1.5 a) ..... $\boxed{2\ 022}$

1.5 b) ..... $\boxed{\frac{1}{2}}$

1.5 c) ..... $\boxed{1}$

1.5 d) ..... $\boxed{2}$

1.6 a) ..... $\boxed{\frac{-1}{n(n+1)^2}}$

1.6 b) ..... $\boxed{-\frac{ab}{a-b}}$

1.6 c) ..... $\boxed{\frac{3}{2}n}$

1.7 ..... $\boxed{\frac{n^3+n}{n+1}}$

1.8 a) ..... $\boxed{4+\frac{5}{6}}$

1.8 b) ..... $\boxed{1+\frac{1}{k-1}}$

1.8 c) ..... $\boxed{3+\frac{5}{x-2}}$

1.9 ..... $\boxed{2t}$

1.10 a) ..... $\boxed{\frac{3}{5}>\frac{5}{9}}$

1.10 b) ..... $\boxed{\frac{12}{11}>\frac{10}{12}}$

1.10 c) ..... $\boxed{\frac{125}{25}=\frac{105}{21}}$

1.11 ..... $\boxed{\text{Non}}$

1.12 ..... $\boxed{A>B}$

Corrigés

1.1 a) $\frac{32}{40}=\frac{8\times 4}{8\times 5}=\frac{4}{5}$

.....

1.1 b) $8^3\times\frac{1}{4^2}=(2\times 4)^3\times\frac{1}{4^2}=2^3\times 4^3\times\frac{1}{4^2}=2^3\times 4=2^5$

.....

1.1 c) $\frac{27^{-1}\times 4^2}{3^{-4}\times 2^4}=\frac{(3^3)^{-1}\times(2^2)^2}{3^{-4}\times 2^4}=\frac{3^4}{3^3}=3$

.....

1.1 d) On a : $\frac{(-2)^{2k+1}\times 3^{2k-1}}{4^k\times 3^{-k+1}}=\frac{(-2)\times(-2)^{2k}\times 3^{2k}\times 3^{-1}}{4^k\times 3^{-k}\times 3}=\frac{(-2)\times 4^k\times 3^{2k}\times 3^k}{4^k\times 3^2}=-2\times 3^{3k-2}$.

.....

1.2 a) On met au même dénominateur : $\frac{2}{4}-\frac{1}{3}=\frac{2\times 3}{4\times 3}-\frac{1\times 4}{3\times 4}=\frac{6}{12}-\frac{4}{12}=\frac{6-4}{12}=\frac{2}{12}=\frac{1}{6}$.

.....

1.2 b) On transforme 0,2 en fraction et on met au même dénominateur :

$$\frac{2}{3}-0{,}2=\frac{2}{3}-\frac{2}{10}=\frac{2\times 10}{3\times 10}-\frac{2\times 3}{10\times 3}=\frac{20}{30}-\frac{6}{30}=\frac{20-6}{30}=\frac{14}{30}=\frac{7\times 2}{15\times 2}=\frac{7}{15}.$$

.....

1.2 c) Pour multiplier des fractions, on multiplie les numérateurs entre eux et les dénominateurs entre eux :

$$\frac{36}{25}\times\frac{15}{12}\times 5=\frac{36}{25}\times\frac{15}{12}\times\frac{5}{1}=\frac{36\times 15\times 5}{25\times 12\times 1}=\frac{12\times 3\times 5\times 3\times 5}{5\times 5\times 12\times 1}=\frac{3\times 3}{1}=\frac{9}{1}=9.$$

.....

1.2 d) Pour diviser une fraction par une autre, on la multiplie par la fraction inverse de la deuxième fraction :

$$-\frac{2}{15}\div(-\frac{6}{5})=-\frac{2}{15}\times(-\frac{5}{6})=\frac{2}{15}\times\frac{5}{6}=\frac{2\times 5}{15\times 6}=\frac{2\times 5}{3\times 5\times 2\times 3}=\frac{1}{9}.$$

1.3 a) On développe :

$$(2\times3\times5\times7)\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}\right)=\frac{2\times3\times5\times7}{2}+\frac{2\times3\times5\times7}{3}+\frac{2\times3\times5\times7}{5}+\frac{2\times3\times5\times7}{7}$$
$$=3\times5\times7+2\times5\times7+2\times3\times7+2\times3\times5=105+70+42+30=247.$$

1.3 b) On simplifie d'abord, puis on applique les règles de calcul :

$$\left(\frac{136}{15}-\frac{28}{5}+\frac{62}{10}\right)\times\frac{21}{24}=\left(\frac{136}{15}-\frac{28}{5}+\frac{31}{5}\right)\times\frac{7}{8}$$
$$=\left(\frac{136}{15}+\frac{3}{5}\right)\times\frac{7}{8}=\left(\frac{136}{15}+\frac{9}{15}\right)\times\frac{7}{8}=\frac{145}{15}\times\frac{7}{8}=\frac{29}{3}\times\frac{7}{8}=\frac{203}{24}.$$

1.3 c) On simplifie d'abord les termes comportant des exposants :

$$\frac{5^{10}\times7^3-25^5\times49^2}{(125\times7)^3+5^9\times14^3}=\frac{5^{10}\times7^3-5^{10}\times7^4}{5^9\times7^3+5^9\times7^3\times2^3}=\frac{5^{10}\times7^3(1-7)}{5^9\times7^3(1+2^3)}=\frac{5\times(-6)}{9}=\frac{-10}{3}.$$

1.3 d) On calcule :

$$\frac{1\,978\times1\,979+1\,980\times21+1\,958}{1\,980\times1\,979-1\,978\times1\,979}=\frac{1\,978\times1\,979+1\,979\times21+21+1\,958}{1\,979\times(1\,980-1\,978)}$$
$$=\frac{1\,979\times(1\,978+21)+1\,979}{1\,979\times2}=\frac{1\,979\times(1\,978+21+1)}{1\,979\times2}=\frac{1\,979\times2\,000}{1\,979\times2}$$
$$=1\,000.$$

1.4 On calcule :

$$\frac{0{,}5-\frac{3}{17}+\frac{3}{37}}{\frac{5}{6}-\frac{5}{17}+\frac{5}{37}}+\frac{0{,}5-\frac{1}{3}+\frac{1}{4}-0{,}2}{\frac{7}{5}-\frac{7}{4}+\frac{7}{3}-3{,}5}=\frac{\frac{3}{6}-\frac{3}{17}+\frac{3}{37}}{\frac{5}{6}-\frac{5}{17}+\frac{5}{37}}+\frac{\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{4}-\frac{1}{5}}{\frac{7}{5}-\frac{7}{4}+\frac{7}{3}-\frac{7}{2}}$$
$$=\frac{3\left(\frac{1}{6}-\frac{1}{17}+\frac{1}{37}\right)}{5\left(\frac{1}{6}-\frac{1}{17}+\frac{1}{37}\right)}+\frac{\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{4}-\frac{1}{5}}{-7\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{4}-\frac{1}{5}\right)}=\frac{3}{5}-\frac{1}{7}=\frac{16}{35}.$$

1.5 a) On connaît l'identité remarquable : $(a-b)(a+b)=a^2-b^2$.

Donc : $\dfrac{2\,022}{(-2\,022)^2+(-2\,021)(2\,023)}=\dfrac{2\,022}{(2\,022)^2+(1-2\,022)\times(1+2\,022)}=\dfrac{2\,022}{(2\,022)^2+1-2\,022^2}=2\,022.$

1.5 b) On fait apparaître 2 021 dans 2 020 et 2 022 au dénominateur :

$$\frac{2\,021^2}{2\,020^2+2\,022^2-2}=\frac{2\,021^2}{(2\,021-1)^2+(2\,021+1)^2-2}$$
$$=\frac{2\,021^2}{2\,021^2-2\times2\,021\times1+1+2\,021^2+2\times2\,021\times1+1-2}$$
$$=\frac{2\,021^2}{2\,021^2-2\times2\,021\times1+2\,021^2+2\times2\,021\times1}=\frac{2\,021}{2\,021-2+2\,021+2}=\frac{1}{2}.$$

1.5 c) En posant $a=1\,234$, on a : $1\,235=a+1$ et $2\,469=2a+1$.

Donc : $\dfrac{1\,235\times2\,469-1\,234}{1\,234\times2\,469+1\,235}=\dfrac{(a+1)(2a+1)-a}{a(2a+1)+a+1}=\dfrac{2a^2+2a+1}{2a^2+2a+1}=1.$

1.5 d) En posant $a=1\,000$, on a : $999=a-1$, $1\,001=a+1$, $1\,002=a+2$ et $4\,002=2a+2$.

Donc : $\dfrac{4\,002}{1\,000\times1\,002-999\times1\,001}=\dfrac{4a+2}{a(a+2)-(a-1)(a+1)}=\dfrac{2(2a+1)}{a^2+2a-(a^2-1)}=\dfrac{2(2a+1)}{2a+1}=2.$

1.6 a) On met au même dénominateur. Cela donne :

$$\frac{1}{(n+1)^2}+\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n}=\frac{n}{n(n+1)^2}+\frac{n(n+1)}{n(n+1)^2}-\frac{(n+1)^2}{n(n+1)^2}=\frac{n+n(n+1)-(n+1)^2}{n(n+1)^2}$$
$$=\frac{n+n^2+n-(n^2+2n+1)}{n(n+1)^2}=\frac{-1}{n(n+1)^2}.$$

.....

1.6 b) On rappelle la formule : $a^3-b^3=(a-b)\big(ab+a^2+b^2\big)$. Cela donne :

$$\frac{a^3-b^3}{(a-b)^2}-\frac{(a+b)^2}{a-b}=\frac{(a-b)\big(ab+a^2+b^2\big)}{(a-b)^2}-\frac{(a+b)^2}{a-b}=\frac{ab+a^2+b^2}{a-b}-\frac{a^2+2ab+b^2}{a-b}=-\frac{ab}{a-b}.$$

.....

1.6 c) Pour $n\in\mathbb{N}^*\backslash\{1,2\}$, on a :

$$\frac{\dfrac{6(n+1)}{n(n-1)(2n-2)}}{\dfrac{2n+2}{n^2(n-1)^2}}=\frac{6(n+1)}{n(n-1)(2n-2)}\times\frac{n^2(n-1)^2}{2n+2}=\frac{6(n+1)}{2(n-1)}\times\frac{n(n-1)}{2(n+1)}=\frac{3}{2}n.$$

.....

1.7 De $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}k=\frac{n(n+1)}{2}$, on a : $\dfrac{\displaystyle\sum_{k=0}^{n^2}k}{\displaystyle\sum_{k=0}^{n}k}=\dfrac{\dfrac{n^2(n^2+1)}{2}}{\dfrac{n(n+1)}{2}}=\dfrac{n^2(n^2+1)}{2}\dfrac{2}{n(n+1)}=\dfrac{n(n^2+1)}{n+1}=\dfrac{n^3+n}{n+1}.$

.....

1.8 a) On trouve $\dfrac{29}{6}=\dfrac{4\times6+5}{6}=4+\dfrac{5}{6}$.

.....

1.8 b) On trouve $\dfrac{k}{k-1}=\dfrac{k-1+1}{k-1}=1+\dfrac{1}{k-1}$.

.....

1.8 c) On trouve $\dfrac{3x-1}{x-2}=\dfrac{3(x-2)+5}{x-2}=3+\dfrac{5}{x-2}$.

.....

1.9 Pour $t\in\mathbb{R}\backslash\{-1\}$, on a :

$$A=\frac{1}{1+t^2}-\frac{1}{(1+t)^2}=\frac{(1+t)^2}{(1+t^2)(1+t)^2}-\frac{1+t^2}{(1+t^2)(1+t)^2}=\frac{1+2t+t^2-\big(1+t^2\big)}{(1+t^2)(1+t)^2}=\frac{2t}{(1+t^2)(1+t)^2}.$$

Donc, $AB=\left(\dfrac{2t}{(1+t^2)(1+t)^2}\right)\times\big(1+t^2\big)(1+t)^2=2t.$

.....

1.10 a) $\dfrac{3}{5}=\dfrac{27}{45}>\dfrac{5}{9}=\dfrac{25}{45}$

.....

1.10 c) $\dfrac{125}{25}=5=\dfrac{105}{21}$

.....

1.11 Nous allons étudier les produits en croix.

On sait que $A=B$, si et seulement si $33\,215\times208\,341=66\,317\times104\,348$. Le nombre de gauche est le produit de deux nombres impair, il est impair. Par contre, le nombre de droite est le produit de deux nombres de parités différentes, il est pair. Par conséquent, l'égalité n'est pas vérifiée. A et B ne sont pas égaux.

.....

1.12 On re-écrit $A=\dfrac{10^5+1}{10^6+1}$ et $B=\dfrac{10^6+1}{10^7+1}$. Nous allons étudier les produits en croix.

D'une part calculons : $(10^5+1)\times(10^7+1)=10^{12}+10^7+10^5+1$.

D'autre part : $(10^6+1)^2=10^{12}+2\times10^6+1$.

Comme $(10^5+1)\times(10^7+1)>(10^6+1)\times(10^6+1)$, on obtient : $A>B$.

.....

Fiche n° 2. Puissances

Réponses

2.1 a) ..... $\boxed{10^{8}}$

2.1 b) ..... $\boxed{10^{15}}$

2.1 c) ..... $\boxed{10^{2}}$

2.1 d) ..... $\boxed{10^{-2}}$

2.1 e) ..... $\boxed{10^{4}}$

2.1 f) ..... $\boxed{10^{-8}}$

2.2 a) ..... $\boxed{15^{4}}$

2.2 b) ..... $\boxed{5^{-6}}$

2.2 c) ..... $\boxed{2^{7}}$

2.2 d) ..... $\boxed{(-7)^{-2}}$

2.2 e) ..... $\boxed{3^{5}}$

2.2 f) ..... $\boxed{3^{28}}$

2.3 a) ..... $\boxed{2^{-4}\cdot 3^{-1}}$

2.3 b) ..... $\boxed{2^{21}\cdot 3}$

2.3 c) ..... $\boxed{2}$

2.3 d) ..... $\boxed{2^{38}\cdot 3^{26}}$

2.4 a) ..... $\boxed{8}$

2.4 b) ..... $\boxed{11}$

2.4 c) ..... $\boxed{3^{10}}$

2.4 d) ..... $\boxed{2^{6}\cdot 5}$

2.5 a) ..... $\boxed{\dfrac{x}{x+1}}$

2.5 b) ..... $\boxed{\dfrac{1}{x-2}}$

2.5 c) ..... $\boxed{\dfrac{2x}{x+1}}$

2.5 d) ..... $\boxed{\dfrac{2}{x-2}}$

Corrigés

2.3 a) $\dfrac{2^3\cdot 3^2}{3^4\cdot 2^8\cdot 6^{-1}} = \dfrac{2^3\cdot 3^2}{3^4\cdot 2^8\cdot 2^{-1}\cdot 3^{-1}} = \dfrac{2^3\cdot 3^2}{3^{4-1}\cdot 2^{8-1}} = \dfrac{2^3\cdot 3^2}{3^3\cdot 2^7} = 2^{3-7}\cdot 3^{2-3} = 2^{-4}\cdot 3^{-1}.$

.....

2.3 b) On factorise : $2^{21}+2^{22} = 2^{21}+2^{21}\cdot 2 = 2^{21}\cdot(1+2) = 2^{21}\cdot 3.$

.....

2.3 c) On factorise au numérateur et au dénominateur : $\dfrac{3^{22}+3^{21}}{3^{22}-3^{21}} = \dfrac{(3+1)\cdot 3^{21}}{(3-1)\cdot 3^{21}} = \dfrac{4}{2} = 2.$

.....

2.3 d) On simplifie en appliquant les règles habituelles de calcul avec les puissances, et en exploitant le fait que $(-a)^n = a^n$ lorsque n est pair : $\dfrac{\left(3^2\cdot(-2)^4\right)^8}{\left((-3)^5\cdot 2^3\right)^{-2}} = \dfrac{3^{16}\cdot 2^{32}}{3^{-10}\cdot 2^{-6}} = 2^{38}\cdot 3^{26}.$

.....

2.4 a) On fait apparaitre les facteurs premiers 2 et 3 : $\dfrac{8^{17}\cdot 6^{-6}}{9^{-3}\cdot 2^{42}} = \dfrac{2^{3\cdot 17}\cdot 2^{-6}\cdot 3^{-6}}{3^{2\cdot(-3)}\cdot 2^{42}} = \dfrac{2^{51-6}\cdot 3^{-6}}{3^{-6}\cdot 2^{42}} = 2^{45-42} = 2^3 = 8.$

.....

2.4 b) Avec les facteurs premiers 5 et 11 : $\dfrac{55^2\cdot 121^{-2}\cdot 125^2}{275\cdot 605^{-2}\cdot 25^4} = \dfrac{(5\cdot 11)^2\cdot(11^2)^{-2}\cdot(5^3)^2}{5^2\cdot 11\cdot(11^2\cdot 5)^{-2}\cdot(5^2)^4} = \dfrac{5^8\cdot 11^{-2}}{5^8\cdot 11^{-3}} = 11.$

.....

2.4 c) On fait apparaitre les facteurs premiers 2, 3 et 5 : $\dfrac{12^{-2}\cdot 15^4}{25^2\cdot 18^{-4}} = \dfrac{(2^2)^{-2}\cdot 3^{-2}\cdot 3^4\cdot 5^4}{(5^2)^2\cdot 2^{-4}\cdot(3^2)^{-4}} = \dfrac{2^{-4}\cdot 3^2\cdot 5^4}{2^{-4}\cdot 3^{-8}\cdot 5^4} = 3^{10}.$

.....

2.4 d) Même méthode que précédemment : $\dfrac{36^3\cdot 70^5\cdot 10^2}{14^3\cdot 28^2\cdot 15^6} = \dfrac{2^6\cdot 3^6\cdot 2^5\cdot 5^5\cdot 7^5\cdot 2^2\cdot 5^2}{2^3\cdot 7^3\cdot 2^4\cdot 7^2\cdot 3^6\cdot 5^6} = \dfrac{2^{13}\cdot 3^6\cdot 5^7\cdot 7^5}{2^7\cdot 3^6\cdot 5^6\cdot 7^5} = 2^6\cdot 5.$

.....

2.5 a) On met au même dénominateur les deux premières écritures fractionnaires : $\dfrac{x}{x-1}-\dfrac{2}{x+1}-\dfrac{2}{x^2-1} = \dfrac{x(x+1)-2(x-1)}{(x-1)(x+1)}-\dfrac{2}{x^2-1} = \dfrac{x^2+x-2x+2}{(x+1)(x-1)}-\dfrac{2}{(x+1)(x-1)} = \dfrac{x^2-x}{(x+1)(x-1)} = \dfrac{x}{x+1}$

.....

2.5 b) Même méthode : $\dfrac{2}{x+2}-\dfrac{1}{x-2}+\dfrac{8}{x^2-4} = \dfrac{2(x-2)-(x+2)}{(x+2)(x-2)}+\dfrac{8}{(x+2)(x-2)} = \dfrac{2x-4-x-2+8}{(x+2)(x-2)} = \dfrac{1}{x-2}$

.....

2.5 c) On commence par simplifier les puissances superflues, puis c'est le même principe que précédemment : $\dfrac{x^2}{x^2-x}+\dfrac{x^3}{x^3+x^2}-\dfrac{2x^2}{x^3-x} = \dfrac{x}{x-1}+\dfrac{x}{x+1}-\dfrac{2x}{x^2-1} = \dfrac{x(x+1+x-1)}{(x-1)(x+1)}-\dfrac{2x}{(x+1)(x-1)} = \dfrac{2x^2-2x}{(x+1)(x-1)} = \dfrac{2x}{x+1}$

.....

2.5 d) $\dfrac{1}{x}+\dfrac{x+2}{x^2-4}+\dfrac{2}{x^2-2x} = \dfrac{1}{x}+\dfrac{x+2}{(x+2)(x-2)}+\dfrac{2}{x(x-2)} = \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x-2}+\dfrac{2}{x(x-2)} = \dfrac{x-2+x}{x(x-2)}+\dfrac{2}{x(x-2)} = \dfrac{2}{x-2}$

.....

Fiche n° 3. Calcul littéral

Réponses

3.1 a) $8x^3 - 6x^2 + \frac{3}{2}x - \frac{1}{8}$

3.1 b) $x^5 - 2x^4 + x^3 - x^2 + 2x - 1$

3.1 c) $x^5 - x^3 + x^2 - 1$

3.1 d) $x^5 + 2x^4 + x^3 - x^2 - 2x - 1$

3.1 e) $x^5 - x^3 - x^2 + 1$

3.1 f) $x^4 + x^2 + 1$

3.2 a) $-2 + 12x - 17x^2 + 8x^3 - 3x^4$

3.2 b) $-28 + 21x$

3.2 c) $2 - x + x^3 - x^4 - x^5$

3.2 d) $-1 - 3x - 3x^2 + x^3$

3.2 e) $1 + x^4$

3.2 f) $1 + 2x + 3x^2 + 2x^3 + x^4$

3.3 a) $-6(6x + 7)$

3.3 b) $4(5x + 4)(-5x + 1)$

3.3 c) $2(3x - 4)(10x + 3)$

3.3 d) $-8(x + 1)(x + 16)$

3.4 a) $(x - 1)^2$

3.4 b) $(x + 2)^2$

3.4 c) $(x + 1)(x + 2)$

3.4 d) $3\left(x + \frac{7 - \sqrt{37}}{6}\right)\left(x + \frac{7 + \sqrt{37}}{6}\right)$

3.4 e) $2\left(x + \frac{3 - \sqrt{233}}{4}\right)\left(x + \frac{3 + \sqrt{233}}{4}\right)$

3.4 f) $-5(x - 1)\left(x - \frac{1}{5}\right)$

3.5 a) $(x + y - z)(x + y + z)$

3.5 b) $(14x + 3y)(-12x + 3y)$

3.5 c) $(x + 1)(y + 1)$

3.5 d) $(x - 1)(y - 1)$

3.5 e) $(x + y)(x + 1)^2$

3.5 f) $\left(a^2 + b^2\right)\left(y - 4x^2\right)\left(y + 4x^2\right)$

3.6 a) $(x - 1)(x + 1)\left(x^2 + 1\right)$

3.6 b) $-8\left(x^2 + 1\right)(x - 4)(x + 4)$

3.6 c) $\left(x^2 + x + 1\right)\left(x^2 - x + 1\right)$

3.6 d) $\left(a^2 + b^2\right)\left(c^2 + d^2\right)$

3.6 e) $\left(a^2 + b^2 + c^2 + d^2\right)\left(p^2 + q^2 + r^2 + s^2\right)$

Corrigés

3.1 a) On utilise directement l'identité remarquable $(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$.

3.1 b) On peut écrire : $(x - 1)^3\left(x^2 + x + 1\right) = \left(x^3 - 3x^2 + 3x - 1\right)\left(x^2 + x + 1\right) = x^5 - 2x^4 + x^3 - x^2 + 2x - 1$. Pour être "efficace", il suffit de rechercher directement le coefficient du terme d'un degré donné (sachant que $(ax^n)(bx^p) = abx^{n+p}$). Par exemple, dans l'expression finale et en utilisant l'étape intermédiaire, le coefficient du terme de degré 2 est donné par $(-3) \times 1 + 3 \times 1 + (-1) \times 1 = -1$. Ici, l'étape intermédiaire n'étant pas compliquée (à effectuer et à retenir), on peut (éventuellement) se passer de l'écrire.

3.1 c) Connaissant les identités remarquables $(x-1)(x+1) = x^2 - 1$ et $(x+1)\left(x^2 - x + 1\right) = x^3 + 1$, on a facilement :

$$(x + 1)^2(x - 1)\left(x^2 - x + 1\right) = [(x + 1)(x - 1)]\left[(x + 1)\left(x^2 - x + 1\right)\right] = \left(x^2 - 1\right)\left(x^3 + 1\right) = x^5 - x^3 + x^2 - 1.$$

Que pensez-vous de la nécessité d'écrire les étapes intermédiaires ?

3.1 d) On calcule : $(x + 1)^2(x - 1)\left(x^2 + x + 1\right) = \left(x^2 + 2x + 1\right)\left(x^3 - 1\right) = x^5 + 2x^4 + x^3 - x^2 - 2x - 1$.

3.1 e) On calcule : $(x-1)^2(x+1)\big(x^2+x+1\big) = \big(x^2-1\big)\big(x^3-1\big) = x^5-x^3-x^2+1$.

.....

3.3 a) Une identité remarquable fait apparaître le facteur commun $6x+7$. On calcule alors

$$-(6x+7)(6x-1)+36x^2-49 = -(6x+7)(6x-1)+(6x)^2-7^2 = (6x+7)[-(6x-1)+6x-7] = -6(6x+7)$$

.

.....

3.3 b) On calcule $25-(10x+3)^2 = 5^2-(10x+3)^2 = (10x+8)(-10x+2) = 4(5x+4)(-5x+1)$.

.....

3.4 c) La forme canonique est $\left(x+\dfrac{3}{2}\right)^2-\dfrac{1}{4}$. On en déduit la factorisation à l'aide de l'identité remarquable $a^2-b^2=\ldots$

.....

3.4 d) La forme canonique est $3\left[\left(x+\dfrac{7}{6}\right)^2-\dfrac{37}{36}\right]$.

.....

3.4 e) La forme canonique est $2\left[\left(x+\dfrac{3}{4}\right)^2-\dfrac{233}{16}\right]$.

.....

3.4 f) La forme canonique est $-5\left[\left(x-\dfrac{3}{5}\right)^2-\dfrac{4}{25}\right]$.

.....

3.5 b) On calcule $x^2+6xy+9y^2-169x^2 = (x+3y)^2-(13x)^2 = (14x+3y)(-12x+3y)$.

.....

3.5 e) On calcule $x^3+x^2y+2x^2+2xy+x+y = (x+y)(x^2+2x+1) = (x+y)(x+1)^2$.

.....

3.6 a) On calcule $x^4-1 = \big(x^2-1\big)\big(x^2+1\big) = (x-1)(x+1)\big(x^2+1\big)$.

.....

3.6 b) On calcule $\big(-9x^2+24\big)\big(8x^2+8\big)+64x^4-64 = -8\big(x^2+1\big)\big[9x^2-24-8\big(x^2-1\big)\big] = -8\big(x^2+1\big)(x-4)(x+4)$.

.....

3.6 c) On calcule $x^4+x^2+1 = x^4+2x^2+1-x^2 = \big(x^2+1\big)-x^2 = \big(x^2+x+1\big)\big(x^2-x+1\big)$. La factorisation est alors terminée sur $\mathbb{R}$ puisque les deux équations, $x^2+x+1=0$ et $x^2-x+1=0$, n'ont pas de solutions réelles.

.....

3.6 d) Une fois n'est pas coutume : on peut commencer par développer avant de factoriser. Ce qui donne

$$(ac+bd)^2+(ad-bc)^2 = a^2c^2+b^2d^2+a^2d^2+b^2c^2 = \big(a^2+b^2\big)\big(c^2+d^2\big).$$

Remarque : signalons tout de même qu'une autre voie (sans calcul) consiste à interpréter en termes de module d'un produit de deux nombres complexes !

.....

Fiche n° 4. Racines carrées

Réponses

4.1 a) ..... $\boxed{5}$

4.1 b) ..... $\boxed{\sqrt{3}-1}$

4.1 c) ..... $\boxed{-\sqrt{3}+2}$

4.1 d) ..... $\boxed{\sqrt{7}-2}$

4.1 e) ..... $\boxed{\pi-3}$

4.1 f) ..... $\boxed{|3-a|}$

4.2 a) ..... $\boxed{20}$

4.2 b) ..... $\boxed{9+4\sqrt{5}}$

4.2 c) ..... $\boxed{1+\sqrt{3}}$

4.2 d) ..... $\boxed{3+\sqrt{2}}$

4.2 e) ..... $\boxed{12\sqrt{7}}$

4.2 f) ..... $\boxed{12}$

4.2 g) ..... $\boxed{9-\frac{10}{3}\sqrt{2}}$

4.2 h) ..... $\boxed{10}$

4.3 a) .... $\boxed{2-\sqrt{2}-\sqrt{3}+\frac{1}{2}\sqrt{6}}$

4.3 b) ..... $\boxed{3-2\sqrt{2}}$

4.3 c) ..... $\boxed{1-\sqrt{10}+\sqrt{15}}$

4.3 d) .... $\boxed{\sqrt{15}+\sqrt{10}-\sqrt{6}-2}$

4.3 e) ..... $\boxed{-(\sqrt{2}+\sqrt{3})}$

4.3 f) .... $\boxed{-\frac{3+\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{6}}{2}}$

4.3 g) ..... $\boxed{2\sqrt{2}}$

4.3 h) ..... $\boxed{50-25\sqrt{3}}$

4.4 ..... $\boxed{\frac{\sqrt{2}+2-\sqrt{6}}{4}}$

4.5 a) ..... $\boxed{\frac{x}{\sqrt{x-1}}}$

4.5 b) ..... $\boxed{x-\sqrt{x^2-1}}$

4.5 c) ..... $\boxed{1+\sqrt{x-1}}$

4.5 d) ..... $\boxed{\frac{1}{2}\frac{1}{x-1}}$

4.5 e) ..... $\boxed{\frac{x(x-2)}{(x-1)\sqrt{x-1}}}$

4.5 f) ..... $\boxed{-4(x-1)^2}$

4.6 a) ..... $\boxed{\sqrt{2}}$

4.6 b) ..... $\boxed{2\sqrt{2}}$

4.7 a) ..... $\boxed{-11+5\sqrt{5}}$

4.7 b) ..... $\boxed{1+\sqrt{2}}$

4.7 c) ..... $\boxed{1+\sqrt{2}}$

4.7 d) ..... $\boxed{\sqrt{3}}$

4.7 e) ..... $\boxed{1+\sqrt{5}}$

4.7 f) ..... $\boxed{\ln(1+\sqrt{2})}$

4.8 ..... $\boxed{1}$

Corrigés

4.1 a) Quand a est un réel positif, $\sqrt{a}$ est le nombre positif dont le carré vaut a donc $\sqrt{(-5^2)}=5$.

.....

4.1 f) On trouve $|3-a|$, c'est-à-dire $3-a$ si $a \leqslant 3$ et $a-3$ si $a \geqslant 3$.

.....

4.2 c) On essaie de reconnaître une identité remarquable dans la racine :

$$\sqrt{4+2\sqrt{3}}=\sqrt{1+2\sqrt{3}+3}=\sqrt{(1+\sqrt{3})^2}=1+\sqrt{3}.$$

.....

4.3 a) On calcule :

$$\begin{aligned}\frac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{2}}&=\frac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{2}}\times\frac{2-\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}}=\frac{(2-\sqrt{3})(2-\sqrt{2})}{(2+\sqrt{2})(2-\sqrt{2})}\\&=\frac{(2-\sqrt{3})(2-\sqrt{2})}{2^2-2}=\frac{4-2\sqrt{2}-2\sqrt{3}+\sqrt{6}}{2}\\&=2-\sqrt{2}-\sqrt{3}+\frac{1}{2}\sqrt{6}.\end{aligned}$$

.....

4.4 On pose $A := \dfrac{1}{1+\sqrt{2}+\sqrt{3}}$. On a :

$$A = \frac{1}{1+\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)} = \frac{1-\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)}{\left(1+\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)\right)\left(1-\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)\right)} = \frac{1-\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)}{1-\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)^2} = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}-1}{4+2\sqrt{6}}.$$

Ainsi, la technique de la « quantité conjuguée » n'est pas suffisante ici ; mais on peut la réappliquer. On a

$$A = \frac{\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}-1\right)\left(4-2\sqrt{6}\right)}{\left(4+2\sqrt{6}\right)\left(4-2\sqrt{6}\right)} = \frac{4\sqrt{2}-4\sqrt{3}+4\sqrt{3}-6\sqrt{2}-4+2\sqrt{6}}{16-24} = \frac{2\sqrt{2}+4-2\sqrt{6}}{8} = \frac{\sqrt{2}+2-\sqrt{6}}{4}.$$

Ainsi, on a $\boxed{\dfrac{1}{1+\sqrt{2}+\sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{2}+2-\sqrt{6}}{4}}$: ce qu'on cherchait.

Remarque : on pouvait aussi faire un autre type de quantité conjuguée :

$$\frac{1}{1+\sqrt{2}+\sqrt{3}} = \frac{1+\sqrt{2}-\sqrt{3}}{(1+\sqrt{2}+\sqrt{3})(1+\sqrt{2}-\sqrt{3})} = \frac{1+\sqrt{2}-\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}+2-\sqrt{6}}{4}.$$

.....

4.5 c) On essaie de reconnaître une identité remarquable dans la racine :

$$\sqrt{x+2f(x)} = \sqrt{x+2\sqrt{x-1}} = \sqrt{\sqrt{x-1}^2+2\sqrt{x-1}+1} = \sqrt{(\sqrt{x-1}+1)^2} = \sqrt{x-1}+1.$$

.....

4.5 e) Le calcul donne $f''(x) = -\dfrac{1}{4}\dfrac{1}{(x-1)^{3/2}}$ d'où :

$$f(x)+4f''(x) = \sqrt{x-1} - \frac{1}{(x-1)\sqrt{x-1}} = \frac{1}{(x-1)\sqrt{x-1}}((x-1)^2-1) = \frac{x(x-2)}{(x-1)\sqrt{x-1}}.$$

.....

4.6 a) On calcule :

$$\left(\sqrt{3+\sqrt{5}}-\sqrt{3-\sqrt{5}}\right)^2 = 3+\sqrt{5}-2\sqrt{3+\sqrt{5}}\sqrt{3-\sqrt{5}}+3-\sqrt{5} = 6-2\sqrt{9-5} = 6-2\sqrt{4} = 6-4 = 2.$$

De plus, $\sqrt{3+\sqrt{5}}-\sqrt{3-\sqrt{5}} \geqslant 0$, donc $\sqrt{3+\sqrt{5}}-\sqrt{3-\sqrt{5}} = \sqrt{2}$.

.....

4.7 b) On calcule $3+2\sqrt{2} = 2+2\sqrt{2}+1 = (\sqrt{2})^2+2\times 1\times\sqrt{2}+1^2 = (1+\sqrt{2})^2$ et on trouve donc

$$\sqrt{3+2\sqrt{2}} = 1+\sqrt{2}.$$

.....

4.7 e) On calcule : $2\sqrt{\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}} = \sqrt{6+2\sqrt{5}} = \sqrt{1+2\sqrt{5}+\sqrt{5}^2} = \sqrt{(1+\sqrt{5})^2} = 1+\sqrt{5}$.

.....

4.8 Appelons A ce nombre barbare, et écrivons-le $A = \alpha - \beta$ en posant

$$\alpha = \sqrt[3]{3+\sqrt{9+\frac{125}{27}}} \text{ et } \beta = \sqrt[3]{-3+\sqrt{9+\frac{125}{27}}}.$$

Plutôt que de se lancer dans des choses compliquées, calculons A^3 à l'aide de l'identité remarquable. On a

$$A^3 = \alpha^3 - 3\alpha^2\beta + 3\alpha\beta^2 - \beta^3 = \alpha^3 - \beta^3 - 3\alpha\beta(\alpha-\beta)$$

ce qui donne

$$A^3 = 6 - 3A\sqrt[3]{\left(3+\sqrt{9+\frac{125}{27}}\right)\left(-3+\sqrt{9+\frac{125}{27}}\right)}$$

d'où finalement $A^3 = 6-5A$, ce qui est équivalent à $(A-1)(A^2+A+6) = 0$ en observant que 1 est racine évidente de l'équation $t^3+5t-6=0$ d'inconnue t, puis finalement 1 est l'unique racine réelle de cette équation, et donc $A = 1$.

.....

Fiche n° 5. Expressions algébriques

Réponses

5.1 a) ..... $\boxed{7a^2+12a+7}$

5.1 b) ..... $\boxed{a^2-a-1}$

5.1 c) ..... $\boxed{4a^2-a-3}$

5.1 d) ..... $\boxed{-a^2+1}$

5.2 a) ..... $\boxed{8+6\mathrm{i}}$

5.2 b) ..... $\boxed{8-6\mathrm{i}}$

5.2 c) ..... $\boxed{18-26\mathrm{i}}$

5.2 d) ..... $\boxed{-9-46\mathrm{i}}$

5.3 a) ..... $\boxed{39-18\mathrm{i}}$

5.3 b) ..... $\boxed{2197}$

5.3 c) ..... $\boxed{-4+43\mathrm{i}\sqrt{5}}$

5.3 d) ..... $\boxed{1}$

5.4 a) ..... $\boxed{3}$

5.4 b) ..... $\boxed{1}$

5.4 c) ..... $\boxed{1}$

5.4 d) ..... $\boxed{0}$

5.4 e) ..... $\boxed{-1}$

5.4 f) ..... $\boxed{31}$

5.5 a) ..... $\boxed{a^2+2}$

5.5 b) ..... $\boxed{a^3+3a}$

5.5 c) ..... $\boxed{a^4+4a^2+2}$

5.6 a) ..... $\boxed{a^2-2b}$

5.6 b) ..... $\boxed{ab-3c}$

5.6 c) ..... $\boxed{a^3-3ab+3c}$

5.6 d) ..... $\boxed{ab-c}$

5.6 e) ..... $\boxed{ac}$

5.6 f) ..... $\boxed{-2ac+b^2}$

5.7 a) ..... $\boxed{a^2b-ac-2b^2}$

5.7 b) ... $\boxed{a^4-4a^2b+4ac+2b^2}$

5.7 c) ..... $\boxed{0}$

5.7 d) ..... $\boxed{1}$

5.7 e) ..... $\boxed{a}$

Corrigés

5.1 a) On développe $(a+2)^3=a^3+6a^2+12a+8$, puis on simplifie sachant que $a^3=a^2-1$.

5.1 b) De $a^3=a^2-1$, on déduit $a^6=a^3(a^2-a)=a^5-a^4$ et donc $a^5-a^6=a^4$. De plus $a^4=a(a^2-1)$, *etc.*

5.1 c) On commence par $a^6=(a^3)^2=(a^2-1)^2=a^4-2a^2+1=-a^2-a$ puis $a^{12}=(-a^2-a)^2=a^4+2a^3+a^2$.

5.1 d) L'égalité a^3-a^2+1 peut s'écrire $a(a-a^2)=1$ ce qui montre que $a\neq 0$ et $\dfrac{1}{a}=a-a^2$. Alors $\dfrac{1}{a^2}=1-a$.

5.2 a) On développe : $(3+\mathrm{i})^2=9+6\mathrm{i}+\mathrm{i}^2$.

5.2 b) On développe : $(3-\mathrm{i})^2=9+6(-\mathrm{i})+(-\mathrm{i})^2=9-6\mathrm{i}+\mathrm{i}^2$.

5.2 c) D'après le calcul précédent : $(3-\mathrm{i})^3=(8-6\mathrm{i})(3-\mathrm{i})=24-18\mathrm{i}-8\mathrm{i}+6\mathrm{i}^2$.

5.2 d) On développe directement : $(3-2\mathrm{i})^3=3^3-3\cdot 3^2(2\mathrm{i})^1+3\cdot 3^1(2\mathrm{i})^2-(2\mathrm{i})^3$.

5.3 a) On développe : $24-30\mathrm{i}+12\mathrm{i}-15\mathrm{i}^2$.

5.3 b) En remarquant que $(2+3\mathrm{i})(2-3\mathrm{i})=2^2-(3\mathrm{i})^2=4+9$, on obtient par associativité 13^3.

5.3 c) On développe : $(-4+\mathrm{i}\sqrt{5})^3=-4^3+3\cdot 4^2(\mathrm{i}\sqrt{5})-3\cdot 4^1(\mathrm{i}\sqrt{5})^2+(\mathrm{i}\sqrt{5})^3=-64+48\mathrm{i}\sqrt{5}+60-5\mathrm{i}\sqrt{5}$.

5.3 d) On développe : $(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2})^3=-\dfrac{1}{8}+3\cdot i\dfrac{\sqrt{3}}{8}+3\cdot\dfrac{3}{8}-i\dfrac{3\sqrt{3}}{8}$.

5.4 a) De $a^5=1$, on déduit $a^7=a^2$ et $a^6=a$ donc tous les termes se simplifient sauf deux : $4-1=3$.

5.4 b) On commence par $a^{1234} = (a^{10})^{123} \times a^4 = a^4$ car $a^{10} = (a^5)^2 = 1$. De même $a^{2341} = a^1$, *etc.* et on obtient donc finalement $a^4 \times a^1 \times a^2 \times a^3 = a^{10} = 1$.

.....

5.4 c) Ceci vaut a^S où $S = \sum_{k=0}^{1234} k = \dfrac{1234 \times (1234+1)}{2}$ est un entier multiple de 5.

.....

5.4 d) Cette somme partielle de suite géométrique vaut $\dfrac{a^5 - 1}{a - 1}$.

.....

5.4 e) Cette somme géométrique vaut $\dfrac{a^{99} - 1}{a - 1} \times a^1 = \dfrac{a^{100} - a}{a - 1} = \dfrac{1 - a}{a - 1} = -1$.

.....

5.4 f) En réordonnant les facteurs et en développant, on obtient :

$$(2 - a^1)(2 - a^4)(2 - a^2)(2 - a^3) = (5 - 2(a + a^4))(5 - 2(a^2 + a^3)) = 25 - 10(a + a^2 + a^3 + a^4) + 4(a + a^4)(a^2 + a^3).$$

Or $a + a^2 + a^3 + a^4 = -1$ et $(a + a^4)(a^2 + a^3) = a^3 + a^6 + a^4 + a^7 = a + a^2 + a^3 + a^4 = -1$ aussi.

.....

5.5 a) On complète le carré : $x^2 + \dfrac{1}{x^2} = \left(x - \dfrac{1}{x}\right)^2 + 2 \cdot x \cdot \dfrac{1}{x}$.

.....

5.5 b) On se ramène au résultat précédent : $x^3 - \dfrac{1}{x^3} = x\left(x^2 + \dfrac{1}{x^2}\right) - \dfrac{1}{x}\left(x^2 + \dfrac{1}{x^2}\right) + \left(x - \dfrac{1}{x}\right) = a(a^2 + 2) + a$.

.....

5.5 c) De même : $x^4 + \dfrac{1}{x^4} = x^2\left(x^2 + \dfrac{1}{x^2}\right) + \dfrac{1}{x^2}\left(x^2 + \dfrac{1}{x^2}\right) - 2 = (a^2 + 2)^2 - 2$.

.....

5.6 a) On développe $(x + y + z)^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 2(xy + yz + zx)$ puis on conclut par soustraction.

.....

5.6 b) On reconnaît $x(xy + zx) + y(yz + xy) + z(zx + yz) = (x + y + z)(xy + yz + zx) - 3xyz$.

.....

5.6 c) Le développement $(x + y + z)^3 = x^3 + y^3 + z^3 + 3\big[x^2(y + z) + y^2(z + x) + z^2(x + y)\big] + 6xyz$ conduit par soustraction à $a^3 - 3(ab - 3c) - 6c$ d'après l'expression précédente.

.....

5.6 d) *Première solution* : on développe et on obtient une combinaison des expressions précédentes.

Deuxième solution : on reconnaît $(a - z)(a - x)(a - y) = a^3 - (x + y + z)a^2 + (xy + yz + zx)a - xyz$.

.....

5.6 e) En factorisant, on reconnaît $(x + y + z)xyz$.

.....

5.6 f) On se ramène à $(xy)^2 + (yz)^2 + (zx)^2 = (xy + yz + zx)^2 - 2(x^2yz + y^2xz + z^2xy)$.

.....

5.7 a) On cherche $x^2(xy+zx)+y^2(yz+xy)+z^2(zx+yz)$, c'est-à-dire $(x^2+y^2+z^2)(xy+yz+zx)-x^2yz-y^2zx-z^2xy$.

.....

5.7 b) *Première solution* : on développe $(x + y + z)^4$ puis on conclut par soustraction à l'aide des calculs précédents.

Deuxième solution : on remarque qu'il s'agit de calculer $(x^2)^2 + (y^2)^2 + (z^2)^2 = (x^2 + y^2 + z^2)^2 - 2(x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2)$, donc qu'il suffit de développer $(a^2 - 2b)^2 - 2(b^2 - 2ac)$.

.....

5.7 c) On réduit au même dénominateur $(x - y)(y - z)(z - x)$ puis on développe le numérateur.

.....

5.7 d) On réduit au même dénominateur $(x-y)(y-z)(z-x)$ puis on factorise le numérateur par $(z-y)$:

$$\begin{aligned} x^2(z-y)+y^2(x-z)+z^2(y-x) &= x^2(z-y)+(y^2-z^2)x-yz(y-z) \\ &= (z-y)\big[x^2-(y+z)x+yz\big], \end{aligned}$$

et l'on reconnaît pour le dernier facteur : $x^2-(y+z)x+yz=(x-y)x-(x-y)z=(x-y)(x-z)$.

.....

5.7 e) On procède de même :

$$\begin{aligned} x^3(z-y)+y^3(x-z)+z^3(y-x) &= x^3(z-y)+(y^3-z^3)x-yz(y^2-z^2) \\ &= (z-y)\big[x^3-(y^2+yz+z^2)x+yz(y+z)\big] \\ &= (z-y)\big[(x^2-y^2)x-yz(x-y)-z^2(x-y)\big] \\ &= (z-y)(x-y)\big[(x+y)x-yz-z^2\big] \\ &= (z-y)(x-y)\big[(x^2-z^2)+(x-z)y\big] \\ &= (z-y)(x-y)(x-z)[(x+z)+y], \end{aligned}$$

d'où $x+y+z=a$ après simplification par le dénominateur.

.....

Fiche n° 6. Équations du second degré

Réponses

6.1 a) ..... $3, 3$

6.1 b) ..... $-1/3, -1/3$

6.1 c) ..... $2, -6$

6.1 d) ..... $2, 3$

6.1 e) ..... 0, donc 5

6.1 f) ..... 0, donc $-3/2$

6.1 g) ..... $\varnothing$

6.1 h) ..... 1 donc -5

6.1 i) ..... 1 donc $8/3$

6.1 j) ..... -1 donc $-19/5$

6.2 a) ..... $6, 7$

6.2 b) ..... $-3, -5$

6.2 c) ..... $-7, -11$

6.2 d) ..... $-3, 11$

6.2 e) ..... a, b

6.2 f) ..... $a - b, a + b$

6.3 a) ..... $2/3$

6.3 b) ..... $-2/7$

6.3 c) ..... $-1/m$

6.3 d) ..... $2m/(m + 3)$

6.4 a) ..... 1 donc $(a - b)/(b - c)$

6.4 b) ..... 1 donc $c(a - b)/(a(b - c))$

6.4 c) ..... m donc $-(m + a + b)$

6.4 d) ..... m donc $m(a - b)/(b - c)$

6.4 e) ..... m donc ab/m

6.4 f) ..... $a + b$ puis $2ab/(a + b)$.

6.5 a) ..... $x^2 - 22x + 117 = 0$

6.5 b) ..... $x^2 - 6x - 187 = 0$

6.5 c) ..... $x^2 - 4x + 1 = 0$

6.5 d) ..... $x^2 - 2mx + 3 = 0$

6.5 e) ..... $2x^2 - (4m + 1)x + (2m^2 + m - 15) = 0$

6.5 f) .... $m^2x^2 + (m - 2m^2)x + (m^2 - m - 2) = 0$

6.6 a) ..... $m = -3/4$ et $x = 3/4$

6.6 b) ... $m = -1$ et $x = -2$, ou $m = 7$ et $x = 2/3$

6.6 c) ..... $m = 1$ et $x = -1$ ou $m = -1$ et $x = 1$

6.7 a) ..... $a = 2$ et $b = 3$

6.7 b) ..... $a = -2$ et $b = 1$

6.7 c) ..... $a = -3$ et $b = 5$

6.7 d) ..... $a = 1/2$ et $b = 8$

6.7 e) ..... $a = 1$ et $b = 3\sqrt{7}$

6.8 a) ..... $]-\infty, 1] \cup [\sqrt{2}, +\infty[$

6.8 b) ..... $[-3, 5]$

6.8 c) ..... $]-\infty, -1] \cup [2/3, +\infty[$

6.8 d) ..... $]-\infty, -1/2[\cup [4, +\infty[$

Corrigés

6.1 a) C'est une identité remarquable : $x^2 - 6x + 9 = (x - 3)^2$.

6.1 c) Le nombre 2 est racine évidente, l'autre est donc -6 en regardant le produit des racines qui vaut -12.

6.1 e) La racine 0 est la racine évidente par excellence ; la somme des racines valant ici 5 l'autre racine est 5.

6.1 g) La fonction $x \longmapsto 2x^2 + 3$ est strictement postivie car elle est minorée par 3, donc elle ne s'annule pas.

6.2 a) Ici on cherche des racines un peu moins évidentes : on remplace le problème par le problème équivalent de la détermination de deux nombres x_1, x_2 dont le produit vaut 42 et la somme 13. On teste donc les factorisations évidentes de 42, ici $42 = 6 \times 7$ et $13 = 6 + 7$.

.....

6.2 b) On cherche deux nombres dont le produit vaut 15 et la somme -8 : les nombres -3 et -5 conviennent.

.....

6.4 e) En réduisant au même dénominateur de part et d'autre l'éqation devient $m(x^2 + ab) = x(m^2 + ab)$ qui est une équation du second degré. Sur la forme initiale de l'équation on lit que m est racine évidente, l'autre est donc ab/m. Peut-être aurait-on pu voir cette racine « évidente » directement ?

.....

6.4 f) Le nombre 0 est bien tentant, mais n'est pas racine de l'équation. En revanche $a + b$ convient. L'équation se réécrit $(a+b)(x-a)(x-b) = ab(2x-(a+b))$, d'où une équation du second degré dont le coefficient devant x^2 vaut $a+b$ et le terme constant $2ab(a+b)$, donc la deuxième solution de cette équation est $\dfrac{2ab}{a+b}$.

.....

6.5 a) La somme des racines vaut 22, leur produit 117. L'équation cherchée est donc $x^2 - 22x + 117 = 0$.

.....

6.6 a) Une équation du second degré admet une racine double si, et seulement si, son discriminant est nul.

Ici, le discriminant vaut $\Delta = (2m+3)^2 - 4m^2 = 3(4m-1)$. Ainsi, l'équation admet une racine double si, et seulement si, m vaut $-3/4$ ce qui donne $x = 3/4$.

.....

6.6 b) Ici, le déterminant vaut $\Delta = 4(m^2 - 6m - 7)$, donc une racine évidente est -1 donc l'autre vaut 7. Pour $m = -1$ on trouve $x = -2$ et pour $m = 7$ on trouve $x = 2/3$.

.....

6.6 c) Ici le discriminant vaut $\Delta = 4((3m+1)^2 - (m+3)^2) = 32(m^2-1)$ donc l'équation admet une racine double si et seulement si m vaut 1, auquel cas l'équation s'écrit $x^2 + 2x + 1 = 0$ et la racine double est -1, ou m vaut -1, auquel cas l'équation s'écrit $x^2 - 2x + 1 = 0$ dont la racine double est 1.

.....

6.8 a) Un trinôme est du signe du coefficient dominant à l'extérieur de l'intervalle des racines, et du signe opposé entre les racines. Ici, les racines sont $\sqrt{2}$ et 1, le trinôme est donc strictement positif sur $]-\infty, 1[\cup]\sqrt{2}, +\infty[$ et strictement négatif sur $]1, \sqrt{2}[$.

.....

6.8 b) Les racines sont -5 et 3. Le trinôme est donc strictement négatif sur $]-\infty, -3[\cup]5, +\infty[$ et strictement positif sur $]-3, 5[$.

.....

6.8 c) Ici, les racines sont -1 et $2/3$. Le trinôme est donc strictement positif sur $]-\infty, -1[\cup]2/3, +\infty[$ et strictement négatif sur $]-1, 2/3[$.

.....

6.8 d) Le signe d'un quotient est le même que celui d'un produit ! Donc le quotient considéré est strictement positif sur $]-\infty, -1/2[\cup]4, +\infty[$ et strictement négatif sur $]-1/2, 4[$ (attention à l'annulation du dénominateur !).

.....

Fiche n° 7. Exponentielle et Logarithme

Réponses

7.1 a) $4\ln 2$

7.1 b) $9\ln 2$

7.1 c) $-3\ln 2$

7.1 d) $\frac{1}{2}\ln 2$

7.1 e) $3\ln 2$

7.1 f) $2\ln 2 + 2\ln 3$

7.2 a) $-\ln 3 - 2\ln 2$

7.2 b) $2\ln 3 - 2\ln 2$

7.2 c) $\ln 3 + 11\ln 2$

7.2 d) $3\ln 5 + 2\ln 2$

7.2 e) $-2\ln 5 + 4\ln 2$

7.2 f) $2\ln 5 - 2\ln 2$

7.3 $-2\ln 2 - 2\ln 5$

7.4 a) $\frac{25}{8}\ln(\sqrt{2}-1)$

7.4 b) $17 + 12\sqrt{2}$

7.4 c) 0

7.4 d) 0

7.5 a) 8

7.5 b) $\frac{1}{2}$

7.5 c) $\frac{1}{3}$

7.5 d) $\frac{1}{9}$

7.5 e) $-\frac{1}{2}$

7.5 f) $\frac{3}{2}$

7.6 a) -2

7.6 b) $\frac{1}{\ln 2}$

7.6 c) -17

7.6 d) 1

7.6 e) -1

7.6 f) e

7.7 a) impaire

7.7 b) impaire

7.7 c) impaire

7.7 d) impaire

7.8 a) $\mathbb{R}$

7.8 b) ok

7.8 c) 1

7.8 d) -1

7.9 a) $x + \ln 2$

7.9 b) $\frac{e^x}{\sqrt{1+x}}$

7.9 c) $\ln|x-1|$

7.9 d) $-\frac{1}{1+x}$

7.9 e) $e^{x\ln(1+x)}$

7.10 a) $x \geqslant \frac{\ln 12 + 5}{3}$

7.10 b) $x \in [0,1]$

7.10 c) $x \geqslant \frac{2}{e}$

7.10 d) $x \geqslant -\frac{1}{12}$

7.10 e) $\varnothing$

7.10 f) $\frac{-13-\sqrt{273}}{2}$

Corrigés

7.1 a) On a $16 = 4^2 = 2^4$ donc $\ln 16 = 4\ln 2$.

7.1 c) On a $0{,}125 = \frac{1}{8}$ donc $\ln 0,125 = -\ln 8 = -3\ln 2$.

7.1 e) On a $72 = 8\times 9 = 2^3\times 3^2$ donc $\ln 72 - 2\ln 3 = (3\ln 2 + 2\ln 3) - 2\ln 3 = 3\ln 2$.

7.2 c) On a $0,875 = \frac{7}{8}$ donc

$$\begin{aligned}\ln 21 + 2\ln 14 - 3\ln(0{,}875) &= (\ln 3 + \ln 7) + 2(\ln 2 + \ln 7) - 3(\ln 7 - \ln 8)\\ &= \ln 3 + 2\ln 3 + 3\times 3\ln 2 = 3\ln 3 + 11\ln 2.\end{aligned}$$

7.3 On appelle A ce nombre. On a

$$A = (\ln 1 - \ln 2) + (\ln 2 - \ln 3) + \cdots + (\ln 98 - \ln 99) + (\ln 99 - \ln 100)$$

donc en simplifiant les termes deux par deux finalement il reste $A = \ln 1 - \ln 100$, c'est-à-dire $A = -\ln 100$ où $100 = 2^2 \times 5^2$, d'où le résultat $A = -2(\ln 2 + \ln 5)$

On peut écrire plus rigoureusement ce calcul :

$$\begin{aligned} A &= \sum_{k=1}^{99} \ln \frac{k}{k+1} = \sum_{k=1}^{99} (\ln k - \ln(k+1)) \\ &= \sum_{k=1}^{99} \ln k - \sum_{k=1}^{99} \ln(k+1) = \sum_{k=1}^{99} \ln k - \sum_{j=2}^{100} \ln j \end{aligned}$$

en effectuant le changement d'indice $j = k+1$ d'où finalement $A = \ln 1 - \ln 100 = -2(\ln 2 + \ln 5)$.

.....

7.4 a) On a $(1+\sqrt{2})^2 = 3 + 2\sqrt{2}$ et $\dfrac{1}{\sqrt{2}+1} = \sqrt{2} - 1$

On a donc

$$\alpha = \frac{7}{16}\ln(3+2\sqrt{2}) - 4\ln(\sqrt{2}+1) = \frac{7}{16}\ln((1+\sqrt{2})^2) + 4\ln\frac{1}{\sqrt{2}+1} = \frac{7}{8}\ln(1+\sqrt{2}) + 4\ln\frac{1}{\sqrt{2}+1}$$

d'où finalement $\alpha = -\dfrac{7}{8}\ln\dfrac{1}{1+\sqrt{2}} + 4\ln\dfrac{1}{\sqrt{2}+1} = \dfrac{25}{8}\ln\dfrac{1}{\sqrt{2}+1} = \dfrac{25}{8}\ln(\sqrt{2}-1)$.

.....

7.4 c) On a $\gamma = \ln\Big(\big((2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})\big)^{20}\Big) = \ln\big((4-3)^{20}\big) = 0$

.....

7.6 b) On a $\mathrm{e}^{-\ln\ln 2} = \mathrm{e}^{(-1)\ln(\ln 2)} = (\ln 2)^{-1} = \dfrac{1}{\ln 2}$.

.....

7.6 e) On a $\ln\Big(\sqrt{\exp(-\ln \mathrm{e}^2)}\Big) = \dfrac{1}{2}\ln\big(\exp(-\ln \mathrm{e}^2)\big) = \dfrac{1}{2}(-\ln \mathrm{e}^2) = \dfrac{1}{2} \times (-2) = -1$.

.....

7.7 a) f_1 est définie sur $]-2021, +2021[$ qui est symétrique par rapport à 0 et

$$\forall x \in]-2021, +2021[, \quad f(-x) = \ln\frac{2021-x}{2021+x} = \ln\frac{1}{\frac{2021+x}{2021-x}} = -\ln\frac{2021+x}{2021-x} = -f_1(x).$$

.....

7.7 b) On a $\forall x \in \mathbb{R}, \quad x \leqslant |x| < \sqrt{x^2+1}$ donc f_2 est définie sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x on a

$$\begin{aligned} f_2(-x) &= \ln(-x + \sqrt{(-x)^2+1}) \\ &= \ln(-x + \sqrt{x^2+1}) \\ &= \ln\frac{(-x+\sqrt{x^2+1})(x+\sqrt{x^2+1})}{x+\sqrt{x^2+1}} \\ &= \ln\frac{-x^2+(x^2+1)}{x+\sqrt{x^2+1}} = \ln\frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}} = -f_2(x). \end{aligned}$$

.....

7.10 f) Attention à l'ensemble de définition de ces deux équations...

Pour la première équation, on cherche les solutions dans $]-\infty, -5[\cap \Big(]61, +\infty[\cap]-\infty, -7[\Big)$, qui est l'ensemble vide, donc la première équation n'admet aucune solution.

Pour la seconde, on cherche les solutions dans $]-\infty, -5[\cap \Big(]-\infty, -7[\cup]61, +\infty[\Big)$, c'est-à-dire dans l'intervalle $]-\infty, -7[$. Dans ce cas, un réel x appartenant à $]-\infty, -7[$ est solution de l'équation si et seulement si x vérifie $x^2 + 13x - 26 = 0$. Or, ce trinôme admet deux racines réelles : $x_1 = \dfrac{-13-\sqrt{273}}{2}$ et $x_2 = \dfrac{-13+\sqrt{273}}{2}$. Seul x_1 convient car $x_1 \in]-\infty, -7[$ et $x_2 \notin]-\infty, -7[$.

.....