Devoir personnel libre n° 1 à rendre le jour de la rentrée

Ce devoir, comme tous les devoirs de l'année (sauf mention du contraire), est un devoir obligatoire, en temps libre, à faire seul, avec vos cours et TD comme support, sans l'aide d'internet ou d'une tierce personne. Il doit être rendu sur une copie disposant d'une marge conséquente (à droite ou à gauche), rédigé très lisiblement et proprement; les résultats doivent être encadrés en couleur.

Toutes les réponses doivent être justifiées et argumentées, en citant le nom de la proposition/théorème utilisé le cas échéant, et en précisant que les hypothèses ont bien été vérifiées.
N'hésitez pas à me contacter pour toute question ou si une indication vous est nécessaire : pro.detais@gmail.com

Ce devoir d'été a pour but de vous faire réviser des notions dont la connaissance est indispensable à la compréhension du cours de deuxième année. Il est tout autant nécessaire de réviser chacun des chapitres étudiés en première année. À cet effet, le travail suivant est obligatoire :

— révision de chaque chapitre en se réappropriant le cours et en faisant 2 à 3 exercices très basiques (4 heures par chapitre minimum),

— rédaction d'une fiche de synthèse (maximum l'équivalent d'une page A4 recto-verso) pour chacun des chapitres, comprenant toutes les définitions, propositions et théorèmes du chapitre : ces fiches seront ramassées le jour de la rentrée,

— lecture des DS, de vos copies et des corrigés, avec papier/crayon.

— télécharger Scilab sur votre ordinateur personnel si ce n'est déjà fait (http ://www.scilab.org/fr) et revoir les commandes de base détaillées dans la feuille jointe.

— se reposer afin d'avoir un solde de sommeil positif en début d'année.

Pour information, il y aura dès le jour de la rentrée une interrogation écrite sur les points essentiels du programme de première année, par exemple : résolution d'un système linéaire ou inversion d'une matrice par la méthode du pivot de Gauss, formules d'Euler, formules trigonométriques, croissances comparées, sommes géométriques, dérivées usuelles, primitives usuelles, intégration par parties, changement de variable, formule des probabilités totales, formule des probabilités composées, formule de Bayes, probabilité d'une union, probabilité d'une intersection, lois usuelles discrètes finies (de Bernoulli, binômiale, uniforme), séries usuelles (de Riemann, exponentielle), intégrales usuelles (de Riemann, d'intégrande exponentielle), formule de Leibniz, formules de Taylor, développements limités usuels, lois usuelles discrètes infinies (géométrique, de Poisson), lois usuelles à densité (uniforme, exponentielle, normale).

Fournitures particulières : un agenda, un gros cahier de brouillon, crayon papier/gomme, souris correctrice.

I ANALYSE

EXERCICE 1. Divers

1. Tracer sur un même graphe (feuille A4 petits carreaux, ou feuille millimétrée) les courbes représentatives des fonctions exponentielle et logarithme népérien, dans un repère orthonormé, en faisant apparaître les points remarquables et en indiquant dans deux coins différents de la feuille leurs domaines de définition, continuité et dérivabilité, les limites des fonctions, leur ensemble image (i.e. l'image de leur domaine de définition), leurs dérivées et primitives, leur concavité/convexité, et dans un troisième coin le lien entre les deux fonctions.
2. Étudier la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{x\ln(x)}{x+1} - \ln\left(\dfrac{1+x}{2}\right)$. Quelle commande faut-il saisir pour vérifier graphiquement à l'aide de Scilab?
3. Étudier la continuité et la dérivabilité de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x\sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$ si $x \neq 0$ et $f(0) = 0$.

4. À l'aide d'une division Euclidienne de X^3+1 par X^2+1 déterminer une primitive de la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $x \mapsto \dfrac{x^3+1}{x^2+1}$.
5. Démontrer que pour tout entier naturel n : $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^n e^{-t}\,\mathrm{d}t = n!$
6. On pose $I = \displaystyle\int_0^{\pi} \mathrm{e}^t \cos(t)\,\mathrm{d}t$ et $J = \displaystyle\int_0^{\pi} \mathrm{e}^t \sin(t)\,\mathrm{d}t$. Déterminer I et J.
7. Déterminer $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\ln(\cos(x))}{x^2}$
8. Déterminer un équivalent simple de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ définie par $u_n = \ln\left(1+\sin\dfrac{1}{n}\right)$.

EXERCICE 2. Séries, intégrales, équivalents

Soit u la suite définie par $u_k = \dfrac{1}{k\ln(k)}$ pour tout entier naturel $k \geqslant 2$. Le but de l'exercice est l'étude de la série de terme général u_k. On pose $S_n = \displaystyle\sum_{k=2}^{n} u_k$

1. Compléter le programme Scilab ci-dessous pour qu'il puisse calculer numériquement les sommes partielles de la série et en faire une représentation graphique.

```
N=100

function [s,L]=somme_serie (n)
//fonction pour calculer n valeurs de la sommation
//s contient la valeur de la somme au rang k
// et L la liste des valeurs
s=0
L=[]
for k=...:...
s=.....
L.....
end
endfunction

//on calcule la sommation et les valeurs successives de celle-ci
[s,L]=somme_serie(N)
//on affiche la somme
disp(s)
//graphique des valeurs successives de la somme
plot(...,"*r")
```

Donner la valeur de la somme partielle pour $n = 10000$.

2. Démontrer que la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante. Que peut-on en déduire concernant sa limite en l'infini ?
3. Démontrer que la fonction $t \mapsto \dfrac{1}{t\ln(t)}$ est décroissante sur $]0;+\infty[$.
4. En déduire que pour tout entier naturel $k \geqslant 2$: $\displaystyle\int_k^{k+1} \frac{1}{t\ln(t)}\,\mathrm{d}t \leqslant \frac{1}{k\ln(k)}$. Interpréter graphiquement cette inégalité.
5. En déduire que pour tout entier naturel $n \geqslant 2$: $\displaystyle\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k\ln(k)} \geqslant \ln(\ln(n+1)) - \ln(\ln(2))$
6. Conclure sur la nature de la série $\displaystyle\sum_{k\geqslant 2} u_k$.
7. On se propose de trouver un équivalent de S_n en $+\infty$.
   (a) Démontrer que pour tout entier naturel $k \geqslant 2$: $\dfrac{1}{(k+1)\ln(k+1)} \leqslant \displaystyle\int_k^{k+1} \frac{1}{t\ln(t)}\,\mathrm{d}t$
   (b) En déduire que : $S_n \underset{+\infty}{\sim} \ln(\ln(n))$

II ALGÈBRE LINÉAIRE - MATRICES

EXERCICE 3. Applications linéaires, matrices et systèmes

On considère une application f de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$ définie par :

$$\forall (x;y;z) \in \mathbb{R}^3,\ \ f\big((x,y,z)\big) = (3x+2y+z, 2x+2z, x+2y-z)$$

1. Démontrer qu'il existe une matrice A telle que, dans la base canonique, la matrice colonne des coordonnées de $f((x;y;z))$ soit donnée par AX où X est la matrice colonne des coordonnées de $(x;y;z)$.
2. Démontrer que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$.
3. Par une manipulation sur les colonnes de A, démontrer que $\ker(f) \geq 1$.
4. Par un raisonnement sur les dimensions, démontrer que $\mathrm{rg}(f) \leq 2$.
5. Donner une famille libre dans $\mathrm{Im}(f)$ et en déduire que $\mathrm{rg}(f) = 2$ et donner une base de $\mathrm{Im}(f)$.
6. D'après les questions précédentes, f est-elle injective ? Surjective ?
7. Retrouver ces résultats à l'aide de résolutions de systèmes linéaires et donner également une base de $\ker(f)$.

EXERCICE 4. Matrices, puissances de matrices,suites récurrentes

On considère la matrice M définie par :

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

1. Déterminer deux nombres réels α et β tels que $M^3 = \alpha M^2 + \beta M$.
2. Démontrer qu'il existe deux suites de nombres réels $(a_n))_{n\in\mathbb{N}^\star}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ telles que $M^n = a_n M^2 + b_n M$ pour tout entier naturel $n \geqslant 1$ et préciser les relations de récurrence vérifiées par les deux suites.
3. Démontrer que la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie :
$$\forall n \in \mathbb{N},\ n \geqslant 2,\ \ a_{n+1} - a_n - 2a_{n-1} = 0$$
4. En déduire l'expression de a_n puis de M^n en fonction de n.
5. `Scilab` :
   (a) Quelles commandes faut-il saisir dans `Scilab` pour vérifier la formule donnant M^n pour $n = 5$?
   (b) Écrire une fonction `Scilab` permettant de vérifier les formules trouvées jusqu'à un rang N.

EXERCICE 5. Endomorphismes, matrices

On note g_1 et g_2 les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $g_1(x) = \sin(x)\,\mathrm{e}^x$ et $g_2(x) = \cos(x)\,\mathrm{e}^x$. Dans l'espace vectoriel des fonctions continues sur $\mathbb{R}$, on note E le sous-espace vectoriel engendré par g_1 et g_2.

1. Démontrer que la famille $\mathscr{B} = \big(g_1, g_2\big)$ est une famille libre et en déduire la dimension et une base de E.
2. On considère l'application φ définie sur E par :
$$\forall g \in E,\ \ \varphi(g) = g'$$
   (a) Démontrer que φ est une endomorphisme de E
   (b) Donner la matrice M de φ dans $\mathscr{B}$.
   (c) Démontrer que M est inversible et calculer son inverse M^{-1}. Quelle commande `Scilab` permet de vérifier le résultat ?
3. En déduire une primitive de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = (2\sin(x) + 3\cos(x))\,\mathrm{e}^x$.

III PROBABILITÉ

EXERCICE 6. On lance indéfiniment et de manière indépendante un dé à 6 faces bien équilibré et on note X la variable aléatoire donnant le rang d'apparition du second 6 si celui-ci apparaît et 0 sinon. On note A_k l'événement : « obtenir un 6 au $k^{\text{ième}}$ lancer » et Y_k le nombre de 6 obtenus avant, jusqu'au $k^{\text{ième}}$ lancer inclus.

1. Donner les valeurs prises par X.
2. Pour $k \geq 2$. Exprimer l'événement $[X = k]$ en fonction de Y_{k-1} et A_k
3. En déduire que pour tout entier naturel $k \geq 2$:
$$P(X = k) = \frac{k-1}{36} \times \left(\frac{5}{6}\right)^{k-2}.$$
4. Démontrer que $P(X = 0) = 0$.

EXERCICE 7. Soit X suivant une loi uniforme sur $[\![1, n]\!]$. On considère alors la variable aléatoire Y définie par :
$$Y = \frac{1}{X(X+1)}$$

1. Déterminer a et b deux réels tels que pour tout $t \in \mathbb{R} \setminus \{0;1\}$: $\dfrac{1}{t(t+1)} = \dfrac{a}{t} + \dfrac{b}{t+1}$.
2. Justifier l'existence et calculer $E(Y)$.

EXERCICE 8. Lois usuelles, séries, variables aléatoires discrètes

Soi X une variable aléatoire définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ et suivant une loi de Poisson $\mathscr{P}(\lambda)$ avec $\lambda > 0$. On définit une variable aléatoire Y on posant
$$\forall \omega \in \Omega,\ Y(\omega) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad X(\omega) \text{ est nul ou impair} \\ \dfrac{X(\omega)}{2} & \text{si} \quad X(\omega) \text{ pair} \end{cases}$$

1. Rappeler l'expression de e^x sous forme de somme de série et en déduire que
$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\lambda^{2k+1}}{(2k+1)!} = \frac{\mathrm{e}^{\lambda} - \mathrm{e}^{-\lambda}}{2}.$$
2. Déterminer la loi de Y. On démontrera en particulier que $\mathbb{P}(Y = 0) = \dfrac{1}{2} + \dfrac{2\,\mathrm{e}^{-\lambda} - \mathrm{e}^{-2\lambda}}{2}$.
3. Démontrer que Y admet une espérance et que $E(\lambda) = \lambda\left(\dfrac{1 - \mathrm{e}^{-2\lambda}}{4}\right)$.
4. `Scilab` . On se propose de faire une simulation numérique des résultats précédents.
   (a) Quelle commande faut-t-il exécuter à l'aide de la fonction `grand` pour générer un échantillon de 1000 entiers pris aléatoirement en suivant une loi de Poisson de paramètre λ ?
   (b) En déduire l'écriture d'une fonction simulant un échantillon de 1000 résultats de la variable aléatoire Y.
   (c) Compléter cette fonction pour qu'elle renvoie la moyenne observée sur cet échantillon.
   (d) Comparer au résultat théorique obtenu lorsque $N = 1000$ et $\lambda = 3$.