Chiffres significatifs et incertitudes

Prérequis

- Les incertitudes sont à donner avec deux chiffres significatifs.
- Toutes les incertitudes fournies sont des incertitudes-type.

Ainsi, si le résultat d'une mesure de vitesse est de 30 mètres par seconde avec une incertitude-type de 1 mètre par seconde, on notera cette vitesse

$$v = (30{,}0 \pm 1{,}0)\,\mathrm{m \cdot s^{-1}}.$$

Résultats numériques

Entraînement 1.1 — Écriture scientifique.

Réécrire les nombres en utilisant l'écriture scientifique. On veillera à garder les chiffres significatifs.

a) 31,5 .....

b) 0,001 9 .....

c) 0,812 0 .....

d) 1 600 002 .....

e) 2 023,9 .....

f) 7 300 .....

g) 330×10^{6} .....

h) $70{,}22 \times 10^{-4}$ .....

Entraînement 1.2 — Combien de chiffres significatifs ?

Indiquer le nombre de chiffres significatifs des grandeurs mesurées suivantes :

a) une intensité électrique de 0,39 A. ..

b) une tension de 12,84 mV. .....

c) une vitesse de $12{,}250\,\mathrm{km \cdot h^{-1}}$. .....

d) une longueur de 0,002 0 m. .....

Entraînement 1.3 — Opérations et chiffres significatifs.

Effectuer les calculs en gardant le bon nombre de chiffres significatifs.

a) Combien de kilomètres sont parcourus en 6,0 min par une voiture roulant à une vitesse moyenne $v = 80\,\mathrm{km \cdot h^{-1}}$? .....

b) Quel est le périmètre d'un rectangle de largeur 6 mm et de longueur 15 cm ? .....

Le gain d'un pont diviseur de tension vaut $G = \dfrac{R_2}{R_1 + R_2}$. On effectue le montage avec une résistance $R_1 = 0{,}9\,\mathrm{k\Omega}$ et d'une résistance $R_2 = 100\,\Omega$.

c) Que vaut le gain G ? .....

QCM **Entraînement 1.4 — Incertitude et chiffres significatifs.**

Une mesure de focale donne pour résultat $f' = 12{,}016\,835\,7$ cm avec une incertitude-type de $32{,}316\,648\,2$ mm. Quel sera votre résultat numérique final ?

(a) $f' = (12 \pm 3)$ cm

(b) $f' = (120 \pm 65)$ mm

(c) $f' = (12{,}0 \pm 3{,}2)$ cm

(d) $f' = (120 \pm 33)$ mm

.....

Propagation des erreurs

Prérequis

On considère deux grandeurs expérimentales indépendantes x et y, et $z = f(x, y)$ une grandeur calculée.

L'incertitude-type $\mathsf{u}(z)$ est reliée à celles de x et y *via* les relations :

$$\mathsf{u}(z)^2 = a^2\,\mathsf{u}^2(x) + b^2\,\mathsf{u}^2(y) \quad \text{si} \quad z = ax + by$$

$$\left(\frac{\mathsf{u}(z)}{z}\right)^2 = a^2\left(\frac{\mathsf{u}(x)}{x}\right)^2 + b^2\left(\frac{\mathsf{u}(y)}{y}\right)^2 \quad \text{si} \quad z = c\,x^a y^b$$

où a, b et c sont des paramètres fixés.

A.N. **Entraînement 1.5 — Pour commencer.**

On mesure $x = (10{,}0 \pm 0{,}2)$ m et $y = (9{,}1 \pm 0{,}3)$ m.

Calculer :

a) $x + y$ .....

b) $x - y$ .....

c) $x \times y$ .....

d) $\dfrac{y}{x}$ .....

Entraînement 1.6 — Dosage d'une solution.

On dose une solution acide de concentration c_A inconnue. Le volume de solution dosée est V_A, et la solution utilisée pour le dosage est de concentration c_B. À l'équivalence, un volume V_B de base est versée et l'on a

$$c_A = \frac{c_B \times V_B}{V_A}$$

La base est préparée de sorte à avoir $c_B = (100{,}0 \pm 2{,}0)\ \text{mmol} \cdot \text{L}^{-1}$.

De plus, on mesure les volumes $V_A = (20{,}00 \pm 0{,}10)$ mL et $V_B = (11{,}80 \pm 0{,}10)$ mL

Quel résultat obtient-on pour c_A ? (en $\text{mmol} \cdot \text{L}^{-1}$) .....

Entraînement 1.7 — Puissance électrique dans une résistance.

On désire mesurer la puissance dissipée par effet Joule dans une résistance, donnée par $\mathcal{P} = U \times I = R\,I^2$.

Donner la puissance (exprimée en watts) et son incertitude pour les mesures suivantes :

a) $U = (2{,}382 \pm 0{,}050)\,\mathrm{V}$ et $I = (0{,}500 \pm 0{,}010)\,\mathrm{A}$ .....

b) $I = (0{,}500 \pm 0{,}010)\,\mathrm{A}$ et $R = (4{,}70 \pm 0{,}14)\,\Omega$ .....

c) Ces deux mesures sont-elles compatibles ?

(a) Oui (b) Non

.....

Entraînement 1.8 — Diamètre d'un tube.

On mesure l'épaisseur d'un tube cylindrique au pied à coulisse.

Le diamètre intérieur du tube est $d = (6{,}8 \pm 0{,}1)\,\mathrm{mm}$ et le diamètre extérieur $D = (10{,}3 \pm 0{,}1)\,\mathrm{mm}$.

a) Exprimer l'épaisseur e du tube en fonction de d et D.

(a) $\pi(D^2 - d^2)$ (b) $\dfrac{D-d}{2}$ (c) $\sqrt{D^2 + d^2}$ (d) $\dfrac{d-D}{2}$

.....

b) En déduire l'expression de l'incertitude-type sur l'épaisseur $\mathsf{u}(e)$ en fonction de D, d, $\mathsf{u}(d)$ et $\mathsf{u}(D)$.

(a) $\dfrac{1}{2}\sqrt{\mathsf{u}^2(D) + \mathsf{u}^2(d)}$

(b) $\sqrt{\left(\dfrac{\mathsf{u}(D)}{D}\right)^2 + \left(\dfrac{\mathsf{u}(d)}{d}\right)^2}$

(c) $\sqrt{u^2(D) + u^2(d)}$

(d) $\dfrac{1}{2}\sqrt{\left(\dfrac{\mathsf{u}(D)}{D}\right)^2 + \left(\dfrac{\mathsf{u}(d)}{d}\right)^2}$

.....

c) En déduire le résultat de la mesure de e.

(a) $e = (1{,}75 \pm 0{,}07)\,\mathrm{mm}$

(b) $e = (1{,}75 \pm 0{,}10)\,\mathrm{mm}$

(c) $e = (1{,}8 \pm 0{,}1)\,\mathrm{mm}$

(d) $e = (1{,}750 \pm 0{,}071)\,\mathrm{mm}$

.....

Entraînement 1.9 — Analyse d'une figure de diffraction.

On mesure la figure de diffraction obtenue en interposant un cheveu entre un écran et un laser. La distance entre le cheveu et l'écran est $D = (3 \pm 10 \times 10^{-3})\,\mathrm{m}$ la longueur d'onde du laser $\lambda = (632{,}80 \pm 0{,}10)\,\mathrm{nm}$, et l'on observe une tache de diffraction de largeur $\ell = (5{,}10 \pm 0{,}30)\,\mathrm{cm}$.

Le diamètre d du cheveu peut alors se déduire de ces mesures *via* la relation :

$$d = 2\frac{\lambda\,D}{\ell}.$$

a) Exprimer l'incertitude $\mathsf{u}(d)$ en fonction de d, λ, D, ℓ,

et de $\mathsf{u}(\lambda)$, $\mathsf{u}(D)$ et $\mathsf{u}(\ell)$ .....

b) Quel résultat obtient-on pour d ? (en µm) .....

Incertitudes expérimentales

A.N. **Entraînement 1.10 — Série de mesures.**

On procède à $n = 10$ mesures d'une tension. Le tableau ci-dessous recense les résultats :

Mesure n°	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
U_i (en V)	4,955	5,596	4,271	4,955	5,164	5,371	4,671	4,736	5,393	4,183

a) Que vaut la moyenne arithmétique $m = \dfrac{1}{n}\sum_i U_i$ de la série ? .....

b) Calculer l'écart-type expérimental de la série $\sigma_U = \sqrt{\dfrac{\sum_i (U_i - m)^2}{n-1}}$ .....

L'incertitude-type de m est donnée par $\mathsf{u}(m) = \dfrac{\sigma_U}{\sqrt{n}}$.

c) En déduire le résultat final de la mesure .....

A.N. **Entraînement 1.11 — Focométrie.**

On procède à des mesures d'une distance focale (notée f') ; le tableau ci-dessous recense les résultats :

f' (en cm)	24,6	24,5	25,1	25,1	25,3	25,4	24,9	24,8	24,9	25,4	25,3	24,9

Donner le résultat final de la mesure .....

QCM **Entraînement 1.12 — Résistances en série.**

On dispose de n résistances identiques, dont l'incertitude relative est donnée à 1 %. On les monte en série. Ainsi, la résistance totale est égale à la somme des résistances individuelles.

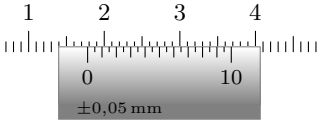
Quelle est l'incertitude relative pour la résistance totale lorsque $n = 5$?

(a) 0,44 % (b) 1 % (c) 2,2 %

.....

Entraînement 1.13 — Mesure au pied à coulisse.

On mesure le diamètre d d'un fil de cuivre au pied à coulisse (on prendra $\mathsf{u}(d) = 0{,}050\,\text{mm}$) :



a) Que vaut le diamètre ? .....

b) En déduire la section droite du fil (en mm^2) .....

Autour du z-score

Prérequis

On appelle *écart normalisé* (ou z-*score*) entre deux grandeurs x_1 et x_2, connues avec une incertitude type $\mathsf{u}(x_1)$ et $\mathsf{u}(x_2)$, le nombre réel positif défini par

$$\mathsf{z} = \frac{|x_2 - x_1|}{\sqrt{\mathsf{u}(x_1)^2 + \mathsf{u}(x_2)^2}}.$$

Par convention, les deux valeurs x_1 et x_2 sont dites compatibles si $\mathsf{z} \leqslant 2$. Comme c'est un indicateur à comparer à 2, on ne garde qu'une décimale lors de sa détermination.

On utilise en particulier cette définition dans le cas où une des grandeurs, par exemple x_1 peut être considérée comme une référence, avec une incertitude négligeable. On a alors $\mathsf{u}(x_1) \ll \mathsf{u}(x_2)$ et la formule approchée plus simple :

$$\mathsf{z} = \frac{|x_2 - x_1|}{\mathsf{u}(x_2)}.$$

QCM **Entraînement 1.14 — Z-scores et compatibilité.**

Dans chaque situation, deux valeurs d'une même grandeur sont obtenues indépendamment.

Indiquer, en calculant leurs z-scores, si ces valeurs sont compatibles :

a) La vitesse du son dans l'air est déterminée expérimentalement à $(349{,}0 \pm 2{,}3)\,\mathrm{m \cdot s^{-1}}$. Une table de référence donne $(344{,}08 \pm 0{,}69)\,\mathrm{m \cdot s^{-1}}$.

(a) Oui, elles sont compatibles (b) Non, elles ne le sont pas

.....

b) Une température est mesurée par deux groupes en TP. Le premier groupe obtient $(52{,}900 \pm 0{,}060)\,°\mathrm{C}$, le second $(53{,}100 \pm 0{,}060)\,°\mathrm{C}$.

(a) Oui, elles sont compatibles (b) Non, elles ne le sont pas

.....

c) Une lentille est vendue pour avoir une focale de 25 cm. Lors d'une séance de TP, cette focale est mesurée à $(24{,}05 \pm 0{,}85)$ cm.

(a) Oui, elles sont compatibles (b) Non, elles ne le sont pas

.....

Réponses mélangées

$1{,}0 \times 10^{-1}$ (a) $1{,}9 \times 10^{-3}$ $(1{,}175 \pm 0{,}059)\,\mathrm{W}$ $(59{,}0 \pm 1{,}4)\,\mathrm{mmol \cdot L^{-1}}$

$(19{,}10 \pm 0{,}36)\,\mathrm{m}$ (b) $(1{,}191 \pm 0{,}035)\,\mathrm{W}$ $(1{,}780 \pm 0{,}050)\,\mathrm{mm}$ $7{,}022 \times 10^{-3}$

$0{,}472\,\mathrm{V}$ (a) 4 (d) $8{,}120 \times 10^{-1}$ $(74{,}4 \pm 4{,}4)\,\mathrm{\mu m}$ 2 (b)

$2{,}023\,9 \times 10^{3}$ $31\,\mathrm{cm}$ $7{,}300 \times 10^{3}$ 2 $d\sqrt{\left(\frac{\mathsf{u}(\lambda)}{\lambda}\right)^2 + \left(\frac{\mathsf{u}(D)}{D}\right)^2 + \left(\frac{\mathsf{u}(\ell)}{\ell}\right)^2}$

$1{,}600\,002 \times 10^{6}$ $(0{,}90 \pm 0{,}36)\,\mathrm{m}$ $3{,}30 \times 10^{8}$ $(2{,}49 \pm 0{,}14)\,\mathrm{mm^2}$

(a) (c) et (d) $4{,}929\,5\,\mathrm{V}$ (a) $(25{,}017 \pm 0{,}092)\,\mathrm{cm}$ $8{,}0\,\mathrm{km}$

$3{,}15 \times 10^{1}$ $(91{,}0 \pm 3{,}5)\,\mathrm{m^2}$ 5 (b) $(4{,}93 \pm 0{,}15)\,\mathrm{V}$ $0{,}910 \pm 0{,}035$

► Réponses et corrigés page 7

Fiche n° 1. Chiffres significatifs et incertitudes

Réponses

1.1 a) ..... $\boxed{3{,}15 \times 10^{1}}$

1.1 b) ..... $\boxed{1{,}9 \times 10^{-3}}$

1.1 c) ..... $\boxed{8{,}120 \times 10^{-1}}$

1.1 d) ..... $\boxed{1{,}600\,002 \times 10^{6}}$

1.1 e) ..... $\boxed{2{,}023\,9 \times 10^{3}}$

1.1 f) ..... $\boxed{7{,}300 \times 10^{3}}$

1.1 g) ..... $\boxed{3{,}30 \times 10^{8}}$

1.1 h) ..... $\boxed{7{,}022 \times 10^{-3}}$

1.2 a) ..... $\boxed{2}$

1.2 b) ..... $\boxed{4}$

1.2 c) ..... $\boxed{5}$

1.2 d) ..... $\boxed{2}$

1.3 a) ..... $\boxed{8{,}0\,\mathrm{km}}$

1.3 b) ..... $\boxed{31\,\mathrm{cm}}$

1.3 c) ..... $\boxed{1{,}0 \times 10^{-1}}$

1.4 ..... (c) et (d)

1.5 a) ..... $\boxed{(19{,}10 \pm 0{,}36)\,\mathrm{m}}$

1.5 b) ..... $\boxed{(0{,}90 \pm 0{,}36)\,\mathrm{m}}$

1.5 c) ..... $\boxed{(91{,}0 \pm 3{,}5)\,\mathrm{m}^2}$

1.5 d) ..... $\boxed{0{,}910 \pm 0{,}035}$

1.6 ..... $\boxed{(59{,}0 \pm 1{,}4)\,\mathrm{mmol \cdot L^{-1}}}$

1.7 a) ..... $\boxed{(1{,}191 \pm 0{,}035)\,\mathrm{W}}$

1.7 b) ..... $\boxed{(1{,}175 \pm 0{,}059)\,\mathrm{W}}$

1.7 c) ..... (a)

1.8 a) ..... (b)

1.8 b) ..... (a)

1.8 c) ..... (d)

1.9 a) ..... $\boxed{d\sqrt{\left(\frac{\mathsf{u}(\lambda)}{\lambda}\right)^2 + \left(\frac{\mathsf{u}(D)}{D}\right)^2 + \left(\frac{\mathsf{u}(\ell)}{\ell}\right)^2}}$

1.9 b) ..... $\boxed{(74{,}4 \pm 4{,}4)\,\mathrm{\mu m}}$

1.10 a) ..... $\boxed{4{,}929\,5\,\mathrm{V}}$

1.10 b) ..... $\boxed{0{,}472\,\mathrm{V}}$

1.10 c) ..... $\boxed{(4{,}93 \pm 0{,}15)\,\mathrm{V}}$

1.11 ..... $\boxed{(25{,}017 \pm 0{,}092)\,\mathrm{cm}}$

1.12 ..... (a)

1.13 a) ..... $\boxed{(1{,}780 \pm 0{,}050)\,\mathrm{mm}}$

1.13 b) ..... $\boxed{(2{,}49 \pm 0{,}14)\,\mathrm{mm}^2}$

1.14 a) ..... (b)

1.14 b) ..... (b)

1.14 c) ..... (a)

Corrigés

1.1 a) Pour passer en écriture scientique, on garde une puissance de 10 et un préfacteur compris entre 1 (inclus) et 10 (exclu). On réécrit alors 31,5 sous la forme $3{,}15 \times 10^{1}$.

.....

1.1 b) On écrit $0{,}001\,9 = 1{,}9 \times 10^{-3}$.

.....

1.1 c) On écrit $0{,}812\,0 = 8{,}120 \times 10^{-1}$.

.....

1.1 d) On écrit $1\,600\,002 = 1{,}600\,002 \times 10^{6}$.

.....

1.1 e) On écrit $2\,023{,}9 = 2{,}023\,9 \times 10^{3}$.

.....

1.1 f) On écrit $7\,300 = 7{,}300 \times 10^{3}$.

.....

1.1 g) On écrit $330 \times 10^{6} = 3{,}30 \times 10^{8}$.

.....

1.1 h) On écrit $70{,}22 \times 10^{-4} = 7{,}022 \times 10^{-3}$.

.....

1.2 a) C'est le nombre de chiffres de 0,39 qu'il faut regarder, il y a 2 chiffres à partir du premier non nul, le nombre de chiffres significatifs est 2.

.....

1.2 b) C'est le nombre de chiffres de 12,84 qu'il faut regarder, il y a 4 chiffres à partir du premier non nul, le nombre de chiffres significatifs est 4.

.....

1.2 c) C'est le nombre de chiffres de 12,250 qu'il faut regarder, il y a 5 chiffres à partir du premier non nul (il faut prendre en compte le zéro final), le nombre de chiffres significatifs est 5.

.....

1.2 d) Les zéros avant le premier chiffre non nul ne comptent pas dans le décompte des chiffres significatifs, ceux après si : le nombre de chiffres significatifs est 2.

.....

1.3 a) Les deux données ont deux chiffres significatifs, on garde donc deux chiffres significatifs lors de la multiplication : on a $d = v\,t = 80\,\mathrm{km} \cdot \mathrm{h}^{-1} \times 0{,}10\,\mathrm{h} = 8{,}0\,\mathrm{km}$.

.....

1.3 b) Il faut additionner la longueur et la largeur puis multiplier par deux : on a

$$p = 2 \times (6\,\mathrm{mm} + 15\,\mathrm{cm}) = 31{,}2\,\mathrm{cm}.$$

Dans la somme, la précision est limitée par la longueur (précise au centimètre près). Il faut donc arrondir au centimètre près : on écrit $p = 31\,\mathrm{cm}$.

.....

1.3 c) Déjà, on a $R_1 + R_2 = 0{,}9\,\mathrm{k\Omega} + 100\,\Omega = 1{,}0\,\mathrm{k\Omega}$, avec deux chiffres significatifs.

On calcule alors le gain par une division, en gardant le plus petit nombre de chiffres significatifs entre le numérateur (trois chiffres significatifs) et le dénominateur (deux chiffres significatifs) :

$$G = \frac{R_2}{R_1 + R_2} = \frac{100\,\Omega}{1{,}0\,\mathrm{k\Omega}} = 1{,}0 \times 10^{-1}.$$

.....

1.4 L'incertitude-type est exprimée dans le résultat final avec deux chiffres significatifs, avec un arrondi par valeur supérieure, ou au plus près (les deux options sont acceptées). Le résultat numérique est ensuite arrondi au niveau du dernier chiffre significatif de l'incertitude-type, donc ici au millimètre. On en déduit $f' = (120 \pm 33)\,\mathrm{mm}$ ou $f' = (120 \pm 32)\,\mathrm{mm}$.

.....

1.5 a) On a $z = x + y = 19{,}1\,\mathrm{m}$ et $\mathsf{u}(z) = \sqrt{0{,}2^2 + 0{,}3^2} = 0{,}36\,\mathrm{m}$. En arrondissant l'incertitude à deux chiffres, on obtient $(19{,}10 \pm 0{,}36)\,\mathrm{m}$.

.....

1.5 b) On a $z = x - y = 0{,}9\,\mathrm{m}$ et $\mathsf{u}(z) = \sqrt{0{,}2^2 + 0{,}3^2} = 0{,}36\,\mathrm{m}$. En arrondissant l'incertitude à deux chiffres, on obtient $(0{,}90 \pm 0{,}36)\,\mathrm{m}$.

Lorsque l'on soustrait deux grandeurs physiques proches, le résultat est en général moins précis que la donnée la moins précise.

.....

1.5 c) On a $z = x \times y = 91\,\mathrm{m}^2$ et $\mathsf{u}(z) = 91 \times \sqrt{(0{,}2/10)^2 + (0{,}3/9{,}1)^2} = 3{,}51\,\mathrm{m}^2$. En arrondissant l'incertitude à deux chiffres, on obtient $(91{,}0 \pm 3{,}5)\,\mathrm{m}^2$.

.....

1.5 d) On a $z = y/x = 0{,}91$ et $\mathsf{u}(z) = 0{,}91 \times \sqrt{(0{,}2/10)^2 + (0{,}3/9{,}1)^2} = 0{,}035\,1$. En arrondissant l'incertitude à deux chiffres, on obtient $(9{,}10 \pm 0{,}35) \times 10^{-1}$.

.....

1.6 On commence par calculer le résultat avant de s'intéresser aux incertitudes :

$$c_A = \frac{c_B \cdot V_B}{V_A} = \frac{100{,}0\,\mathrm{mmol \cdot L^{-1}} \cdot 11{,}8\,\mathrm{mL}}{20\,\mathrm{mL}} = 59\,\mathrm{mmol \cdot L^{-1}}.$$

On propage l'incertitude pour ce produit de grandeurs indépendantes :

$$\frac{\mathsf{u}(c_A)}{c_A} = \sqrt{\left(\frac{\mathsf{u}(c_B)}{c_B}\right)^2 + \left(\frac{\mathsf{u}(V_A)}{V_A}\right)^2 + \left(\frac{\mathsf{u}(V_B)}{V_B}\right)^2}.$$

Numériquement, cela donne

$$\mathsf{u}(c_A) = 59\,\mathrm{mmol \cdot L^{-1}} \sqrt{\left(\frac{2{,}0\,\mathrm{mmol \cdot L^{-1}}}{100{,}0\,\mathrm{mmol \cdot L^{-1}}}\right)^2 + \left(\frac{0{,}10\,\mathrm{mL}}{20{,}00\,\mathrm{mL}}\right)^2 + \left(\frac{0{,}10\,\mathrm{mL}}{11{,}80\,\mathrm{mL}}\right)^2}.$$

On obtient $\mathsf{u}(c_A) = 1{,}4\,\mathrm{mmol \cdot L^{-1}}$, et finalement $c_A = (59{,}0 \pm 1{,}4)\,\mathrm{mmol \cdot L^{-1}}$.

.....

1.7 a) On calcule la puissance : $\mathcal{P} = U \times I = 2{,}382\,\mathrm{V} \times 0{,}500\,\mathrm{A} = 1{,}191\,\mathrm{W}$.

On applique ici la propagation des incertitudes à $\mathcal{P} = U \times I$,

$$\frac{\mathsf{u}(\mathcal{P})}{\mathcal{P}} = \sqrt{\left(\frac{\mathsf{u}(U)}{U}\right)^2 + \left(\frac{\mathsf{u}(I)}{I}\right)^2}.$$

Numériquement, cela donne

$$\mathsf{u}(\mathcal{P}) = 1{,}202\,\mathrm{W} \times \sqrt{\left(\frac{0{,}050\,\mathrm{V}}{2{,}382\,\mathrm{V}}\right)^2 + \left(\frac{0{,}010\,\mathrm{A}}{0{,}500\,\mathrm{A}}\right)^2} = 0{,}035\,\mathrm{W}.$$

Finalement, on obtient $\mathcal{P} = (1{,}191 \pm 0{,}035)\,\mathrm{W}$.

.....

1.7 b) On calcule la puissance : $\mathcal{P} = R \times I^2 = 4{,}7\,\Omega \times (0{,}500\,\mathrm{A})^2 = 1{,}175\,\mathrm{W}$.

On applique ici la propagation des incertitudes à $\mathcal{P} = R \times I^2$: on a

$$\frac{\mathsf{u}(\mathcal{P})}{\mathcal{P}} = \sqrt{\left(\frac{\mathsf{u}(R)}{R}\right)^2 + 2^2\left(\frac{\mathsf{u}(I)}{I}\right)^2}.$$

Numériquement, cela donne

$$\mathsf{u}(\mathcal{P}) = 1{,}175\,\mathrm{W}\sqrt{\left(\frac{0{,}14}{100}\right)^2 + 4 \times \left(\frac{0{,}010\,\mathrm{A}}{0{,}500\,\mathrm{A}}\right)^2} = 0{,}059\,\mathrm{W}.$$

Finalement, on obtient $\mathcal{P} = (1{,}175 \pm 0{,}059)\,\mathrm{W}$.

.....

1.7 c) Les mesures sont $\mathcal{P} = (1{,}191 \pm 0{,}035)\,\mathrm{W}$ et $\mathcal{P} = (1{,}175 \pm 0{,}059)\,\mathrm{W}$. Les deux intervalles se recoupent : les mesures sont compatibles.

.....

1.8 a) L'épaisseur du tube est la différence entre le rayon du cylindre extérieur et le rayon intérieur. Le rayon étant la moitié du diamètre, on trouve $e = \frac{D}{2} - \frac{d}{2}$.

.....

1.8 b) On applique la formule donnée dans les prérequis de cette section avec $a = \frac{1}{2}$ et $b = -\frac{1}{2}$. On trouve

$$\mathsf{u}(e) = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 \mathsf{u}^2(D) + \left(-\frac{1}{2}\right)^2 \mathsf{u}^2(d)} = \frac{1}{2}\sqrt{\mathsf{u}^2(D) + \mathsf{u}^2(d)}.$$

.....

1.8 c) On a $e = \frac{10{,}3\,\mathrm{mm} - 6{,}8\,\mathrm{mm}}{2} = 1{,}75\,\mathrm{mm}$, et $\mathsf{u}(e) = \frac{1}{2}\sqrt{(0{,}1\,\mathrm{mm})^2 + (0{,}1\,\mathrm{mm})^2} = 0{,}071\,\mathrm{mm}$. Finalement, on a donc $e = (1{,}750 \pm 0{,}071)\,\mathrm{mm}$.

.....

1.9 a) On a, pour ce produit de grandeurs indépendantes :

$$\frac{\mathsf{u}(d)}{d} = \sqrt{\left(\frac{\mathsf{u}(\lambda)}{\lambda}\right)^2 + \left(\frac{\mathsf{u}(D)}{D}\right)^2 + \left(\frac{\mathsf{u}(\ell)}{\ell}\right)^2}.$$

.....

1.9 b) On commence par calculer le résultat avant de s'intéresser aux incertitudes :

$$d = 2\frac{\lambda D}{\ell} = 2 \times \frac{632{,}8\,\mathrm{nm} \times 3\,\mathrm{m}}{51\,\mathrm{mm}} = 74{,}447\,\mu\mathrm{m}.$$

Le nombre de chiffres conservés ici n'est pas significatif, juste assez grand pour pouvoir être ajusté ensuite. On calcule ensuite numériquement l'incertitude :

$$\mathsf{u}(d) = 74{,}447\,\mathrm{nm} \times \sqrt{\left(\frac{0{,}10\,\mathrm{nm}}{632{,}8\,\mathrm{nm}}\right)^2 + \left(\frac{10 \times 10^{-3}\,\mathrm{m}}{3{,}000\,\mathrm{m}}\right)^2 + \left(\frac{0{,}30\,\mathrm{cm}}{5{,}1\,\mathrm{cm}}\right)^2} = 4{,}4\,\mu\mathrm{m}.$$

Finalement, on obtient $d = (74{,}4 \pm 4{,}4)\,\mu\mathrm{m}$.

.....

1.10 a) On peut faire le calcul à l'aide d'un tableur (fonction `MOYENNE()` souvent), d'une calculatrice ou de python (fonction `mean()` de la bibliothèque `numpy` par exemple). On obtient $m = \sum_{i=1}^{10} U_i = 4{,}929\,5\,\mathrm{V}$.

.....

1.10 b) Le calcul est fait par une fonction prédéfinie du tableur (`ECARTYPE()` souvent), de la calculatrice ou de python (fonction `std()` de la bibliothèque `numpy` par exemple). On obtient $\sigma_U = 0{,}472\,042\,429\,825\,493\,\mathrm{V}$, soit $0{,}472\,\mathrm{V}$ en gardant trois chiffres significatifs.

.....

1.10 c) On obtient alors $\mathsf{u}(m) = \dfrac{0{,}472}{\sqrt{10}} = 0{,}149\,\mathrm{V}$, que l'on arrondit en gardant deux chiffres significatifs.

L'incertitude-type sur la valeur moyenne est donc finalement $\mathsf{u}(m) = 0{,}15\,\mathrm{V}$.

Il faut exprimer la moyenne au centième de volt ce qui donne le résultat suivant : $m = (4{,}93 \pm 0{,}15)\,\mathrm{V}$. Cette valeur moyenne est la meilleure estimation de la « valeur vraie » que l'on peut faire à partir de cette série de mesures répétées.

.....

1.11 On calcule une valeur moyenne de $25{,}017\,\mathrm{cm}$ et un écart-type des mesures de $0{,}301\,\mathrm{cm}$, ce qui donne une incertitude-type sur la valeur moyenne de $0{,}092\,\mathrm{cm}$.

L'incertitude-type est, avec deux chiffres significatifs, au centième de millimètre, il faut donc garder les chiffres jusqu'à cette décimale : on obtient $(25{,}017 \pm 0{,}092)\,\mathrm{cm}$.

.....

1.12 Pour une résistance, on a $\mathsf{u}(r) = r \times \dfrac{\mathsf{u}(r)}{r}$.

Pour les $n = 5$ résistances, on a $R = n\,r$, et $\mathsf{u}(R) = \sqrt{n\,u^2(r)}$, donc

$$\frac{\mathsf{u}(R)}{R} = \frac{\sqrt{n}}{n} = \frac{1}{\sqrt{n}}.$$

Pour $n = 5$, on obtient $\dfrac{\mathsf{u}(R)}{R} \approx 0{,}44\,\%$.

La réduction de l'incertitude vient du fait que les incertitudes sur les composants sont indépendantes les unes des autres. On retrouve ici le facteur « $\dfrac{1}{\sqrt{n}}$ » qui permet de passer de l'incertitude sur une mesure (une résistance) à celui sur la moyenne d'une série de n mesures (les n résistances en série).

.....

1.13 a) Le zéro de l'échelle mobile est entre $1{,}7\,\mathrm{mm}$ et $1{,}8\,\mathrm{mm}$. Il y a 20 graduations dans l'échelle mobile, le pied à coulisse a donc une précision affichée de $\dfrac{1\,\mathrm{mm}}{20} = 0{,}05\,\mathrm{mm}$. La graduation qui est alignée avec une graduation fixe est la 16e de l'échelle mobile, on lit donc

$$d = 1{,}7\,\mathrm{mm} + 16 \times 0{,}05\,\mathrm{mm} = 1{,}78\,\mathrm{mm}.$$

Le résultat de la mesure est alors $d = (1{,}780 \pm 0{,}050)\,\mathrm{mm}$, puisque conventionnellement les incertitudes sont données avec deux chiffres significatifs.

.....

1.13 b) La section droite est un disque de diamètre d. Sa mesure vaut donc $s = \pi(d/2)^2$. Numériquement on obtient

$$s = \pi \times \left(\frac{1{,}78\,\mathrm{mm}}{2}\right)^2 = 2{,}488\,5\,\mathrm{mm}^2.$$

La section étant reliée au diamètre par une fonction puissance on a

$$\frac{\mathsf{u}(s)}{s} = 2\frac{\mathsf{u}(d)}{d} = 2 \times \frac{0{,}05\,\mathrm{mm}}{1{,}78\,\mathrm{mm}} = 5{,}6\,\%.$$

Finalement, on obtient $\mathsf{u}(s) = 0{,}14\,\mathrm{mm}^2$ et le résultat s'écrit $s = (2{,}49 \pm 0{,}14)\,\mathrm{mm}^2$.

.....

1.14 a) On compare une valeur à une valeur de référence. On vérifie que l'incertitude de la valeur tabulée est très inférieure à celle de la mesure. En effet, l'inégalité

$$(0{,}69\,\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-1})^2 = 0{,}48\,\mathrm{m}^2\cdot\mathrm{s}^{-2} \ll (2{,}3\,\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-1})^2 = 5{,}3\,\mathrm{m}^2\cdot\mathrm{s}^{-2}$$

est bien vérifiée (il y a plus d'un facteur 10 entre les deux valeurs).

On peut donc utiliser la formule simplifiée : on a $\mathsf{z} = \dfrac{4{,}92\,\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-1}}{2{,}3\,\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-1}} = 2{,}14 > 2$.

Ainsi, les deux valeurs sont incompatibles.

.....

1.14 b) On compare deux valeurs avec la même incertitude, on doit appliquer la formule complète, mais qui se simplifie un peu puisque les incertitudes sont les mêmes. On trouve

$$\mathsf{z} = \frac{0{,}2\,^\circ\mathrm{C}}{\sqrt{2}\times 0{,}060\,^\circ\mathrm{C}} = 2{,}4 > 2$$

Ainsi, les deux valeurs sont incompatibles.

.....

1.14 c) On compare une valeur à une valeur de référence exacte : on a $\mathsf{z} = \dfrac{0{,}95\,\mathrm{cm}}{0{,}85\,\mathrm{cm}} = 1{,}1 < 2$. D'après le critère donné, les deux valeurs sont compatibles.

.....